



FAKULTA
ELEKTROTECHNIKY
A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ

Matematika 3

Sbírka příkladů z numerických metod

RNDr. Michal Novák, Ph.D.

Obsah

1	Soustavy lineárních rovnic	5
1.1	Jacobiho a Gauss-Seidelova metoda	5
1.2	Otázky k zamyšlení	8
1.3	Příklady ke zkoušce	9
2	Řešení jedné nelineární rovnice	11
2.1	Algoritmy založené na dělení intervalu, na němž leží právě jedno řešení . .	11
2.2	Otázka k zamyšlení	14
2.3	Metody vycházející z bodu	15
2.3.1	Metoda tečen (Newtonova metoda)	15
2.3.2	Otázky k zamyšlení	17
2.3.3	Metoda prosté iterace	18
2.4	Příklady ke zkoušce	18
3	Soustava nelineárních rovnic	21
3.1	Newtonova metoda	21
3.2	Otázky k zamyšlení	25
3.3	Příklady ke zkoušce	26
4	Aproximace funkcí	27
4.1	Interpolační polynom a splajn	27
4.2	Metoda nejmenších čtverců	30
4.3	Otázky k zamyšlení	33
4.4	Příklady ke zkoušce	34
5	Numerická integrace	37
5.1	Složená lichoběžníková a Simpsonova metoda	37
5.2	Otázky k zamyšlení	39
5.3	Příklady ke zkoušce	39
6	Obyčejné diferenciální rovnice	41
6.1	Jednokrokové metody	41
6.2	Otázky k zamyšlení	43
6.3	Příklady ke zkoušce	44

Úvod

Na FEKT a FIT VUT jsou ve třetím semestru vyučovány předměty *Matematika 3* (BMA3, KMA3), resp. *Numerická matematika a pravděpodobnost* (INM). Předměty jsou až na jednu drobnost stejné. Poskytují studentům úvod do dvou odlišných částí matematiky: *numerických metod* a *pravděpodobnosti a statistiky*. Po několik let citelně chyběla vhodná sbírka příkladů, která by kopírovala přednášky těchto předmětů v podobném duchu jako sbírka [5] pro předmět *Matematika 2* na FEKT. V roce 2008 tento problém částečně vyřešily autorky HLAVIČKOVÁ, HLINĚNÁ sbírkou z pravděpodobnosti a statistiky (literatura [4]). Nyní předkládám studentům zbývající část – sbírku příkladů z numerických metod.

Příklady ve sbírce jsou řazeny do kapitol tak, aby odpovídaly problémům řešeným na přednášce. Zvolil jsem přístup nikoliv *po metodách*, jak by bylo určitě „příjemnější“ pro studenty, ale *po problémech*, protože právě tento přístup je mnohem bližší reálné technické praxi. Všechny kapitoly dodržují jednotnou strukturu:

Nácvik algoritmů: vždy na začátku jsou uvedeny příklady, v nichž jsou předpřipraveny všechny vstupní údaje tak, aby bylo možno naprosto bezmyšlenkovitě a bez jakýchkoliv hlubších úvah použít přesně vyjmenované metody. Tyto části jsou pojmenovány podle jednotlivých metod, jejichž algoritmy se procvičují. V každé příslušné části (s jedinou výjimkou) je uvedeno 10 řešených příkladů se všemi potřebnými mezivýsledky. *Všechny mezivýsledky uváděné v textu jsou výstupem naprogramovaných algoritmů programu MATLAB, u nichž byl zvolen krátký formát výpisu, který implicitně zaokrouhluje přesné výsledky na 4 desetinná místa. Při počítání byste měli pracovat co nejpresněji (např. na 7 desetinných míst) a teprve konečné výsledky zaokrouhlovat. Pokud budete všechny mezivýsledky průběžně zaokrouhlovat pouze na 4 desetinná místa, nebo jen opisovat mezivýsledky ze sbírky, zcela jistě se budou vaše výsledky od těch uvedených ve sbírce lišit.*

Otázky k zamyšlení: poté, co je procvičeno dosazování do vzorců a algoritmů jednotlivých metod, jsou uvedeny otázky k zamyšlení. Právě zvládnutí této části je klíčové pro pochopení různých způsobů řešení problémů, jimiž se BMA3, resp. INM zabývá. Jakmile budete znát odpovědi na tyto otázky a – což je mnohem důležitější – budete vědět, proč tyto otázky byly vůbec položeny, byste se měli vrátit k původním zadáním a hledat, jak při jejich řešení tyto otázky a odpovědi na ně ovlivňují složitost, rychlost a přesnost výpočtu.

Příklady ke zkoušce: nakonec jsou uvedeny některé příklady, které byly zadány u zkou-

šek z BMA3 / INM v letech 2007–9. Tyto příklady prosímberte skutečně jen jako příklady toho, co lze u zkoušky očekávat. To, jestli umíte řešit dané problémy a jestli rozumíte příslušným souvislostem, lze zjistit mnoha různými způsoby.

Na rozdíl od sbírek [5] a [4] není v tomto textu zahrnuto stručné shrnutí látky. Důvodem je skutečnost, že stručnost by v tomto případě nebyla na místě, protože není možné pouze uvést příslušné vzorce, ale je nutné znát rozdíly v povaze jednotlivých přístupů k řešení problémů. Dalším důvodem je fakt, že jen zahrnutí pouhých vzorců by v mnoha případech samo o sobě nebylo příliš stručné. Při práci se sbírkou byste proto měli neustále mít po ruce skriptu [3].

Při řešení jakéhokoli problému z numerických metod byste neměli zapomínat na to, že numerické metody jsou pouze jedním z možných přístupů k řešení reálných technických problémů. Ve své praxi se navíc setkáte se zadáním formulovaných naprosto prakticky, např.: *Navrhněte nejvhodnější (tj. podle potřeby např. nejekonomičtější, nejméně konstrukčně náročný, nejpohodlnější z hlediska zákazníka) způsob vytápění předních sedadel automobilu. Přitom dostanete konstrukční výkresy automobilu a budete znát příslušné parametry (např. použité autobaterie)*. Při řešení budete postupovat nejspíše takto:

1. Problém (zde vytápění sedaček automobilu) vyjádříte v řeči matematiky.
2. Rozhodnete se, zda matematickou úlohu budete řešit analyticky nebo numericky (často si lze vybrat).
3. Zvolíte vhodný způsob řešení, tj. – pokud jste se v bodě 2 rozhodli pro numerické řešení – zvolíte vhodnou numerickou metodu.
4. Zapišete matematickou úlohu do řeči zvolené numerické metody, tj. *algoritmu*.
5. Algoritmus probíhá, ve vhodnou chvíli jej ukončíte.
6. Se znalostí reálného problému vhodně interpretujete získané výsledky.

K tomu, abyste mohli udělat kroky 1 a 6 potřebujete zkombinovat znalosti získané ve všech předmětech se svými zkušenostmi. K tomu, abyste si mohli vhodně vybrat v bodě 2, potřebujete mít komplexní znalosti ze všech matematických předmětů a mít matematiku „zažitou“. K tomu, abyste se při řešení dostali přes body 3 a 4, potřebujete rozumět jednotlivým numerickým metodám (a k tomu právě přispívají části *Otázky k zamyšlení*). Naopak, pokud problém redukuje pouze na bod 5, nepotřebujete více než vyřešit několik zadání z této sbírky (a ostatní text ignorovat). Problém vyhřívání sedadel v automobilu ovšem takto ke spokojenosti zákazníka ani svého budoucího zaměstnavatele rozhodně nevyřešíte.

Pokud vás numerický přístup k řešení matematických, resp. technických problémů, zaujme, můžete si v magisterském studiu (na FEKT) zvolit povinně volitelných předmět *Moderní numerické metody*. Tato sbírka vám pomůže i v něm – v několika kapitolách jsou zadání stejná jako ve sbírce [2]. Řešena jsou však jinými metodami, takže budete mít možnost porovnat mnohem více různých postupů.

Kapitola 1

Soustavy lineárních rovnic

1.1 Jacobiho a Gauss-Seidelova metoda

Zadání prvních pěti příkladů je jednotné: *Proveďte 2 kroky řešení následujících soustav rovnic Jacobiho metodou a poté Gauss–Seidelovou metodou. Za počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Poté srovnajte získaná řešení s přesným řešením získaným nějakou přímou metodou. Samozřejmě vždy ověřte, že v dané situaci bude zvolená metoda konvergovat – pokud tomu tak není, konvergenci zajistěte.*¹

1.

$$\begin{aligned}x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= -6,5 \\10x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 1,5 \\x_1 + 12x_2 - 10x_3 &= -2,5\end{aligned}$$

Řešení: Soustava není v iteračním tvaru, Jacobiho ani Gauss–Seidelova metoda proto obecně nebude konvergovat. Přeskládáme-li rovnice v pořadí (2), (3), (1), budou obě metody konvergovat.

Jacobiho metodou dostáváme $x^{(1)} = (0, 15; -0, 2083; 0, 8125)$ a $x^{(2)} = (0, 6396; 0, 4562; 0, 7010)$, resp. Gauss–Seidelovou metodou dostáváme $x^{(1)} = (0, 15; -0, 2208; 0, 6932)$ a $x^{(2)} = (0, 5849; 0, 3206; 1, 0860)$. Přesné řešení této soustavy je $x = (0, 5; 1; 1, 5)$.

2.

$$\begin{aligned}3x_1 + 10x_2 - 5x_3 &= 8 \\20x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\x_1 - x_2 + 4x_3 &= 4\end{aligned}$$

¹Zadání pocházejí ze sbírky [2], kde jsou však řešena také dalšími metodami.

Řešení: Soustava není v iteračním tvaru, Jacobiho ani Gauss–Seidelova metoda proto obecně nebude konvergovat. Přeskládáme-li rovnice v pořadí (2), (1), (3), budou obě metody konvergovat.

Jacobiho metodou dostáváme $x^{(1)} = (1, 5; 0, 8; 1)$ a $x^{(2)} = (1, 04; 0, 85; 0, 825)$, resp. Gauss–Seidelovou metodou dostáváme $x^{(1)} = (1, 5; 0, 35; 0, 7125)$ a $x^{(2)} = (1, 2163; 0, 7914; 0, 8938)$.

Přesné řešení této soustavy je $x = (1; 1; 1)$.

3.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -0,75 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 13,25 \\ -5x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= -7,75 \end{aligned}$$

Řešení: Soustava není v iteračním tvaru, Jacobiho ani Gauss–Seidelova metoda proto obecně nebude konvergovat. Žádným přeskládáním rovnic nemůžeme docílit, aby soustava byla diagonálně dominantní, tj. abychom mohli použít Jacobiho metodu. Pokud však rovnici přepíšeme do maticového tvaru $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pak pro soustavu $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$, tj.

$$\begin{aligned} 50x_1 + 12x_2 + 12x_3 &= 89,5 \\ 12x_1 + 57x_2 - 17x_3 &= 32,25 \\ 12x_1 - 17x_2 + 43x_3 &= 66,75 \end{aligned}$$

budeme moci použít Gauss–Seidelovu metodu.

Dostaneme, že $x^{(1)} = (1, 79; 0, 1889; 1, 1275)$ a $x^{(2)} = (1, 4741; 0, 5917; 1, 3749)$. Přesné řešení této soustavy je $x = (1, 25; 0, 75; 1, 5)$.

4.

$$\begin{aligned} 1,25x_1 + 4,875x_2 + 2,9x_3 &= 9,85 \\ 7,35x_1 - 2,875x_2 - 1,25x_3 &= -1,075 \\ 17,2x_1 + 4x_2 + 3,3x_3 &= 17,55 \end{aligned}$$

Řešení: Soustava není v iteračním tvaru, Jacobiho ani Gauss–Seidelova metoda proto obecně nebude konvergovat. Žádným přeskládáním rovnic nemůžeme docílit, aby soustava byla diagonálně dominantní, tj. abychom mohli použít Jacobiho metodu. Pokud však rovnici přepíšeme do maticového tvaru $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pak pro soustavu $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$, tj.

$$\begin{aligned} 351,425x_1 + 53,7625x_2 + 51,1975x_3 &= 306,27125 \\ 53,7625x_1 + 48,03125x_2 + 30,93125x_3 &= 121,309375 \\ 51,1975x_1 + 30,93125x_2 + 20,8625x_3 &= 87,82375 \end{aligned}$$

budeme moci použít Gauss–Seidelovu metodu.

Dostaneme, že $x^{(1)} = (0, 8715; 1, 5501; -0, 2273)$ a $x^{(2)} = (0, 6675; 1, 9249; -0, 2823)$.

Metoda konverguje k řešení $(0, 6024; 2, 0444; -0, 2998)$. *Soustava však má nekonečně mnoho řešení, protože třetí rovnice je dvojnásobkem součtu první a druhé rovnice. Nemá tedy smysl používat jakékoliv iterační metody.*

5.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0,6 \\ 7x_1 - 14x_2 - 3x_3 &= -3,7 \\ x_1 + 4x_2 + 33x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Řešení: Soustava je v iteračním tvaru.

Jacobiho metodou dostáváme $x^{(1)} = (0, 06; 0, 2643; 0, 3333)$ a $x^{(2)} = (0, 1071; 0, 2229; 0, 2995)$, resp. Gauss-Seidelovou metodou dostáváme $x^{(1)} = (0, 06; 0, 2943; 0, 2958)$ a $x^{(2)} = (0, 0899; 0, 2458; 0, 3008)$.

Přesné řešení této soustavy je $x = (0, 1; 0, 25; 0, 3)$.

Zadání zbývajících příkladů je opět jednotné: *Vhodnou metodou najděte řešení následujících soustav. Pracujte s přesností $\varepsilon = 0, 01$ a volte $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.*²

6.

$$\begin{aligned} 50x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 589,3 \\ 7x_1 - 26x_2 - 3x_3 &= -32,05 \\ x_1 - 6x_2 + 40x_3 &= -637,65 \end{aligned}$$

Řešení: V 6. kroku Jacobiho metody získáme s danou přesností řešení $x = (12, 45; 6, 35; -15, 3)$.

7.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 91,3 \\ 7x_1 - 11x_2 - 3x_3 &= 63,2 \\ x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= -148,05 \end{aligned}$$

Řešení: V 19. kroku Jacobiho metody získáme s danou přesností řešení $x = (12, 45; 6, 35; -15, 29)$. *Soustava přitom má stejné řešení jako předcházející soustava, tj. $x_3 = -15, 3$.*

²I tato zadání najdete ve sbírce [2].

8.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= -1 \\3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2\end{aligned}$$

Řešení: Řešení této soustavy rovnic je $x = (1, 1, 0)$.

9.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2,58 \\2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 7,49 \\3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5,63\end{aligned}$$

Řešení: Ve 38. kroku Gauss–Seidelovy metody získáme s danou přesností řešení $x = (3,39; 1,66; -1,41)$. Řešení této soustavy rovnic je přitom (po zaokrouhlení) $x = (3,4571; 1,7814; -1,48)$.

10.

$$\begin{aligned}7,35x_1 - 2,875x_2 - 1,25x_3 &= -1,075 \\1,25x_1 + 4,875x_2 + 2,9x_3 &= 9,85 \\-7,35x_1 + 2,875x_2 + 1,25x_3 &= 3,29\end{aligned}$$

Řešení: Soustava nemá řešení.

1.2 Otázky k zamyšlení

Všechna výše uvedená zadání jsou velmi zjednodušená a umělá. V reálných situacích:

- se počet rovnic pohybuje v desítkách, stovkách, někdy i tisících,
- koeficienty v rovnicích vznikají na základě dřívějších výpočtů (viz např. splajny, soustavy nelineárních rovnic, víceokrové metody řešení diferenciálních rovnic a jiné),
- nemusíme znát charakter soustavy rovnic (tedy zejména nemusíme vědět, kolik má řešení - viz např. zadání 4),
- nemusíme znát (rozumný) odhad řešení.

To s sebou samozřejmě přináší mnohé problémy:

1. Jak zjistit, má-li soustava právě jedno řešení? Uvědomte si, že soustava může mít desítky rovnic – lze pak rozumně použít Frobeniovu větu?³
2. Jak ověřit podmínky konvergence, je-li soustava rozsáhlá, nebo pokud vznikla na základě předcházejících výpočtů? Jak konvergenci v tomto případě zaručit?
3. Jak odhadnout počáteční aproximaci? Obě uváděné metody – pokud konvergují – konvergují pro libovolnou počáteční aproximaci. Mohlo by se tedy zdát, že nezáleží na tom, kolik kroků výpočtu proběhne, protože v reálných situacích bude nejspíš vždy pracovat stroj. Uvědomte si však, že v každé kroku výpočtu se dopouštíme alespoň zaokrouhlovacích chyb.
4. Je vůbec soustavu možno řešit numericky?⁴

1.3 Příklady ke zkoušce

1. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 10y - 5z &= 8 \\ 20x + 4y + 6z &= 30 \\ x - y + 5z &= 5 \end{aligned}$$

Zvolte počáteční aproximaci $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ a proveďte 2 kroky Jacobiho metody vedoucí k nalezení řešení dané soustavy.

2. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 4x + 10y - 5z &= 9 \\ 20x + 4y + 6z &= 30 \\ 2x - y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

Zvolte počáteční aproximaci $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ a proveďte 2 kroky Jacobiho metody vedoucí k nalezení řešení dané soustavy.

3. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + 5y - 8z &= -6,5 \\ 10x + 4y - 5z &= 1,5 \\ x + 12y - 10z &= -2,5 \end{aligned}$$

Dále je dáno $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Proveďte dva kroky Jacobiho nebo Gauss-Seidelovy metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

³V této souvislosti byste měli znát **definici** determinantu a vědět, co přesně dělá matematický program, když determinant počítá.

⁴Jedná se o problém stability, který nespadá do bakalářského studia. Příklady nestabilních soustav jsou uvedeny ve sbírce [2] a textu k přednáškám z předmětu *Moderní numerické metody* týchž autorů.

4. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned}x + 5y - 10z &= -9,5 \\10x + 2y - 5z &= 0,5 \\x + 12y - 10z &= -2,5\end{aligned}$$

Dále je dáno $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Proveďte dva kroky Jacobiho nebo Gauss-Seidelovy metody *vedoucí k nalezení řešení* této soustavy.

5. Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 3)$. Nalezněte první aproximaci koeficientů a, b, c takových, aby platilo

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{k},$$

kde $\vec{k} = (1, 2, 1)$. Přitom za počáteční aproximaci volte $\vec{k}^{(0)} = (0, 0, 0)$. *Nápověda:* Nejprve ze zadané podmínky sestavte soustavu rovnic.

6. Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 3)$. Nalezněte první aproximaci koeficientů a, b, c takových, aby platilo

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{k},$$

kde $\vec{k} = (3, 2, 2)$. Přitom za počáteční aproximaci volte $\vec{k}^{(0)} = (0, 0, 0)$. *Nápověda:* Nejprve ze zadané podmínky sestavte soustavu rovnic.

7. Je dána soustava rovnic v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \\ \tau \end{pmatrix}$$

taková, že alespoň jedno z čísel $\rho, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$ je nenulové. Určete konstanty $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma, \tau$ tak, aby zadaná soustava byla řešitelná Gauss-Seidelovou metodou. Volbu konstant zdůvodněte.

Kapitola 2

Řešení jedné nelineární rovnice

V této kapitole naleznete 10 rovnic. Každá z nich je řešena *metodou půlení intervalů*, *metodou regula falsi*, *metodou tečen* (tj. *Newtonovou metodou*) a *metodou prosté iterace*. Číslování příkladů v jednotlivých odstavcích si odpovídá, takže můžete snadno porovnávat výsledky získané jednotlivými metodami. Zadání v této kapitole jsou stejná jako ve sbírce [2] (v té jsou ovšem použity jiné metody řešení), takže můžete snadno porovnat ještě větší paletu možných přístupů k řešení.

2.1 Algoritmy založené na dělení intervalu, na němž leží právě jedno řešení

Metodou půlení intervalů a regula falsi najdete s přesností ϵ kořen rovnice $f(x) = 0$. Počáteční aproximaci volte, jak je uvedeno; požadavkem „najít kořen s přesností ϵ “ rozumíme u metody půlení intervalů požadavek zastavit výpočet, pokud dělíme interval kratší než ϵ – za řešení s danou přesností poté prohlásíme střed tohoto intervalu. U metody regula falsi tímto požadavkem rozumíme zastavit výpočet, jakmile se následující dvě aproximace liší o méně než ϵ .

1. $f(x) = e^x - \sin x - \frac{3}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,75$, $x_3 = 0,8750$, $x_4 = 0,8125$, $x_5 = 0,7813$, $x_6 = 0,7969$, $x_7 = 0,7891$

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,5702$, $x_2 = 0,7501$, $x_3 = 0,7866$, $x_4 = 0,7932$

2. $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^2 - 1$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 1$, $x_2 = 0,75$, $x_3 = 0,6250$, $x_4 = 0,5625$, $x_5 = 0,5938$, $x_6 = 0,5781$, $x_7 = 0,5859$

Otázka: Lze zvolit interval s krajním bodem $x = 0$?

Odpověď: Nelze, protože bod $x = 0$ je jedním z kořenů zadané rovnice.

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,5292$, $x_2 = 0,5484$, $x_3 = 0,5606$, $x_4 = 0,5682$

Otázka: Proč se výsledek získaný metodou regula falsi tak výrazně liší od výsledku získaného pomocí metody půlení intervalů?

3. $f(x) = \sin \frac{x}{2} - x^2$, $a = 0,3$, $b = 1,3$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,8$, $x_2 = 0,55$, $x_3 = 0,425$, $x_4 = 0,4875$, $x_5 = 0,5188$, $x_6 = 0,5031$, $x_7 = 0,4953$

Otázka: Bylo by možné volit za výchozí interval jeden z intervalů $< -0,5; 0,5 >$, resp. $< 0; 0,5 >$? Výpočet by jistě probíhal rychleji, protože hledaný kořen leží velmi blízko bodu $x = 0,5$.

Odpověď: Není možné volit žádný z těchto intervalů. Jeden z kořenů rovnice je také $x = 0$, což vylučuje druhý z nich. První zase nesplňuje podmínku rozdílnosti znamének krajních bodů, tj. $f(a)f(b) < 0$.

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,3519$, $x_2 = 0,3947$, $x_3 = 0,4271$, $x_4 = 0,4502$, $x_5 = 0,4660$, $x_6 = 0,4764$, $x_7 = 0,4832$

4. $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos x - 1$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,75$, $x_2 = 0,875$, $x_3 = 0,8125$, $x_4 = 0,8438$, $x_5 = 0,8594$, $x_6 = 0,8672$

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,7687$, $x_2 = 0,8468$, $x_3 = 0,8615$, $x_4 = 0,8639$

5. $f(x) = e^x \sin x - \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,25$, $x_3 = 0,3750$, $x_4 = 0,3125$, $x_5 = 0,3438$, $x_6 = 0,3594$, $x_7 = 0,3516$

Úprava zadání: Najděte kořen s touž přesností na intervalu $\langle 0; 0,5 \rangle$.

Řešení: Všechny podmínky jsou splněny; aproximace jsou: $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,3750$, $x_3 = 0,3125$, $x_4 = 0,3438$, $x_5 = 0,3594$, $x_6 = 0,3516$

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,2186$, $x_2 = 0,3077$, $x_3 = 0,3402$, $x_4 = 0,3515$, $x_5 = 0,3553$

6. $f(x) = e^{x^2} - x - \frac{4}{3}$, $a = 0,5$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Aproximace jsou: $x_1 = 0,75$, $x_2 = 0,875$, $x_3 = 0,9375$, $x_4 = 0,9063$, $x_5 = 0,8906$, $x_6 = 0,8984$

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,7940$, $x_2 = 0,8749$, $x_3 = 0,8913$, $x_4 = 0,8945$

7. $f(x) = x \sin x + \cos x - 2x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,75$, $x_3 = 0,875$, $x_4 = 0,8125$, $x_5 = 0,7813$, $x_6 = 0,7969$, $x_7 = 0,7891$

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,6180$, $x_2 = 0,7701$, $x_3 = 0,7929$, $x_4 = 0,7959$

8. $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x - x^2 + \frac{1}{5}$, $a = -1,5$, $b = -0,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = -1$, $x_2 = -1,25$, $x_3 = -1,375$, $x_4 = -1,4375$, $x_5 = -1,4688$, $x_6 = -1,4531$, $x_7 = -1,4453$

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = -1,3070$, $x_2 = -1,4409$, $x_3 = -1,4435$

9. $f(x) = x \sin x - x^2 \cos x - x^3 + 1$, $a = 0,2$, $b = 1,2$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,7$, $x_2 = 0,95$, $x_3 = 1,075$, $x_4 = 1,1375$, $x_5 = 1,1688$, $x_6 = 1,1531$, $x_7 = 1,1453$

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 1,0607$, $x_2 = 1,1418$, $x_3 = 1,1449$

10. $f(x) = x^3 - x^2 - x + e^x - 2$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 1$, $x_2 = 1,25$, $x_3 = 1,125$, $x_4 = 1,0625$, $x_5 = 1,0938$, $x_6 = 1,0781$, $x_7 = 1,0859$

Řešení metodou regula falsi: Funkce $f(x)$ je na daném intervalu spojitá, platí, že $f(a)f(b) < 0$, tedy na tomto intervalu bude ležet alespoň jedno řešení rovnice $f(x) = 0$.

Aproximace jsou: $x_1 = 0,8167$, $x_2 = 0,9827$, $x_3 = 1,0523$, $x_4 = 1,0784$, $x_5 = 1,0876$

11. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} - 1$, $a = 0,5$, $b = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení metodou půlení intervalů: Sice platí, že $f(a)f(b) < 0$, avšak funkce není na daném intervalu spojitá a *metodu půlení intervalů* tedy nemůžeme při takto formulované úloze použít.

Řešení metodou regula falsi: Sice platí, že $f(a)f(b) < 0$, avšak funkce není na daném intervalu spojitá a *metodu regula falsi* tedy nemůžeme při takto formulované úloze použít.

2.2 Otázka k zamyšlení

Úlohy uvedené v předcházející kapitole jsou triviální a nevyžadují žádnou invenci – jde v nich pouze o mechanické ověření předpokladů a jednoduchých kritérií konvergence.

Problém při hledání řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$ leží jinde – a sice v určení intervalu, na němž by mohlo řešení ležet, resp. v separaci takového intervalu, na němž

budou splněna kritéria konvergence daných metod. To se týká i *metody půlení intervalů* a *metody regula falsi*, protože ani ony nekonvergují vždy. Musíme totiž nejprve najít interval, na němž je funkce $f(x)$ spojitá a na němž současně leží právě jedno řešení této rovnice.

Pro každý z příkladů v předcházející kapitole byste proto měli být schopni odpovědět na tuto otázku:

1. Jestliže budu mít zadánu pouze rovnici a přesnost, jak najdu interval, na němž mohu řešení hledat?

Odpověď budete potřebovat hned v následující kapitole, kde se řešení týchž příkladů hledá dalšími dvěma metodami.

2.3 Metody vycházející z bodu

Nyní budeme hledat řešení týchž rovnic dvěma metodami, u nichž musíme ověřovat poněkud více předpokladů než u *metody půlení intervalů* a *metody regula falsi*. Toto ověření však ve většině případů vede ke zkrácení a zjednodušení výpočtu. Samotné ověřování však bohužel může být někdy dosti komplikované (zejména u metody prosté iterace). Uvědomte si, že výpočet chceme zkrátit ne proto, abychom sobě nebo stroji ušetřili čas potřebný k výpočtu (i když i to je příjemné), ale proto, abychom minimalizovali riziko a šíření chyb.

2.3.1 Metoda tečen (Newtonova metoda)

Newtonovou metodou najděte s přesností ϵ kořen rovnice $f(x) = 0$. Počáteční aproximaci volte, jak je uvedeno; požadavkem „najít kořen s přesností ϵ “ rozumíme požadavek zastavit výpočet, pokud se následující dvě aproximace liší o méně než ϵ .

Podmínky konvergence jsou podrobně ošetřeny v prvních třech příkladech. U ostatních zadání si sami ověřte, co znamená, když je u řešení napsáno, že: „je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$ “, a najděte si příslušný interval, z něhož můžeme počáteční aproximaci volit. *Ověření samotné podmínky $f(x_0)f''(x_0) > 0$ pro nějaké $x_0 \in \mathbb{R}$ rozhodně neznamená, že je možné „začít počítat“!*

1. $f(x) = e^x - \sin x - \frac{3}{2}$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$ je splněna např. na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Derivace funkce $f(x)$ je $f'(x) = e^x - \cos(x)$ – tato funkce je na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ kladná. Druhá derivace funkce $f(x)$ je $f''(x) = e^x + \sin(x)$ – tato funkce je na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ kladná. Interval $\langle a, b \rangle$ tedy můžeme pro naše úvahy použít. Jestliže zvolíme např. $x_0 = 1 \in \langle a, b \rangle$, musíme ověřit, zda platí podmínka $f(x_0)f''(x_0) > 0$. V tomto případě podmínka platí, a proto můžeme spustit vlastní algoritmus.

Aproximace jsou $x_0 = 1$, $x_1 = 0,8270$, $x_3 = 0,7956$, $x_4 = 0,7946$

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 0,5$.

Řešení: Podmínka konvergence zde splněna není. Pokud si tento fakt neověříme, zjistíme, že teprve hodnoty $x_{76} = 0,7996$ a $x_{77} = 0,7898$ se liší o méně než o požadovanou přesnost. I to je však jen náhoda – ke kořenu bychom vůbec nemuseli dojít.

2. $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x^2 - 1$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$ je splněna např. na intervalu $\langle 0,4, 1 \rangle$. Derivace funkce $f(x)$ je $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - x^2 - 1$ – tato funkce je na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ záporná. Druhá derivace funkce $f(x)$ je $f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} - 2$ – tato funkce je na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ záporná. Interval $\langle a, b \rangle$ tedy můžeme pro naše úvahy použít. (Nemůžeme však použít interval $\langle 0, 1 \rangle$, protože na něm podmínka o neměnnosti znamének derivací neplatí.) Jestliže zvolíme např. $x_0 = 1 \in \langle a, b \rangle$, musíme ověřit, zda platí podmínka $f(x_0)f''(x_0) > 0$. V tomto případě podmínka platí, a proto můžeme spustit vlastní algoritmus. (Podmínka však neplatí např. pro bod $x_0 = 0,4 \in \langle a, b \rangle$.)

Aproximace jsou $x_0 = 1$, $x_1 = 0,7012$, $x_3 = 0,5976$, $x_4 = 0,5805$, $x_5 = 0,5801$.

3. $f(x) = \sin \frac{x}{2} - x^2$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$ je splněna např. na intervalu $\langle 0,4, 1 \rangle$. Derivace funkce $f(x)$ je $f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 2x$ – tato funkce je na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ záporná. Druhá derivace funkce $f(x)$ je $f''(x) = \frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} - 2$ – tato funkce je na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ záporná. Interval $\langle a, b \rangle$ tedy můžeme pro naše úvahy použít. (Nemůžeme však použít interval $\langle 0, 1 \rangle$, protože na něm podmínka o neměnnosti znamének derivací neplatí.) Jestliže zvolíme např. $x_0 = 1 \in \langle a, b \rangle$, zjistíme, že podmínka $f(x_0)f''(x_0) > 0$ neplatí. Pro bod $x_0 = 0,4$ podmínka také neplatí. Jestliže zkusíme např. bod $x_0 = 0,6$, podmínka splněná bude.

Aproximace jsou $x_0 = 0,6$, $x_1 = 0,5107$, $x_3 = 0,4954$, $x_4 = 0,4949$.

Problém: Všimněte si, že logická volba intervalu, na němž budeme hledat řešení je $\langle 0, 1 \rangle$. Nejprve však musíme interval posunout těsně za nulu, protože bod $x = 0$ je kořenem dané rovnice. Pak musíme kvůli požadavku neměnnosti znamének derivací ignorovat část intervalu do cca 0,25. „Logické“ volby počátečních aproximací, tj. $x_0 = 0,3$, $x_0 = 0,4$ a zejména $x_0 = 1$ musíme také vyloučit, protože nesplňují podmínku $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Posléze zjistíme, že řešení leží někde blízko bodu $x = 0,5$. *Jak budete tento příklad řešit bez grafické kalkulačky nebo počítače? Jak bude vypadat náčrtek separace kořenů?*

4. $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos x - 1$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;

Aproximace jsou: $x_0 = 1$, $x_1 = 0,8841$, $x_2 = 0,8650$, $x_3 = 0,8644$.

5. $f(x) = e^x \sin x - \frac{1}{2}$, $x_0 = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;

Aproximace jsou: $x_0 = 1$, $x_1 = 0,6707$, $x_2 = 0,4103$, $x_3 = 0,3593$, $x_4 = 0,3573$.

6. $f(x) = e^{x^2} - x - \frac{4}{3}$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
Aproximace jsou: $x_0 = 1$, $x_1 = 0,9132$, $x_2 = 0,8958$, $x_3 = 0,8952$.

7. $f(x) = x \sin x + \cos x - 2x^2$, $x_0 = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
Aproximace jsou: $x_0 = 1$, $x_1 = 0,8213$, $x_2 = 0,7969$, $x_3 = 0,7964$.

8. $f(x) = x \cos x - x^2 \sin x - x^2 + \frac{1}{5}$, $x_0 = -1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
Aproximace jsou: $x_0 = -1,5$, $x_1 = -1,4440$, $x_2 = -1,4436$.

9. $f(x) = x \sin x - x^2 \cos x - x^3 + 1$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Takto nelze počáteční aproximaci volit, protože $f'(0) = 0$.

Úprava zadání: Řešte tutéž úlohu s touž přesností, avšak za počáteční aproximaci zvolte $x_0 = 1$.

Řešení: Je splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
Aproximace jsou: $x_0 = 1$, $x_1 = 1,1621$, $x_2 = 1,1451$.

10. $f(x) = x^3 - x^2 - x - e^x$, $x_0 = 1,5$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Není splněna podmínka konvergence $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Pokud bychom si toho nevšimli, výpočet bude pokračovat „velmi zajímavým způsobem“¹.

11. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} + 1$, x_0 si sami vhodně určete, abyste mohli najít kořen, který leží na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: $x \doteq 0,75$

2.3.2 Otázky k zamyšlení

Ve výše uvedených zadáních je vždy uvedeno, jakou počáteční aproximaci máte volit. Výpočet vypadá tak, že ověříte podmínky konvergence a poté hledáte „nějaké“ řešení – víte, že pracujete na takovém intervalu, že na něm leží právě jedno řešení. Ověření podmínek konvergence zaručí, že toto řešení naleznete.

Úlohy řešené v praxi však vypadají jinak: funkci $f(x)$ vystupující v rovnici $f(x) = 0$ vykreslíme a poté si určíme, které řešení chceme hledat. Přitom však musíme znát odpovědi na následující otázky:

1. V jakém rozsahu, resp. jak danou funkci vykreslíme?
2. Je ověřování spojitosti funkcí a neměnnosti znamének derivací na daném intervalu skutečně tak jednoduché?

¹Naprogramujte si v MATLABU a nechte si vypsat 1000 kroků.

3. Kde je vůbec funkce $f(x)$ definovaná?
4. Co se stane, když si ulehčím práci a podmínky konvergence ověřovat nebudu?

Zkuste např. sami najít řešení těchto problémů:

1. Nalezněte nejmenší řešení rovnice $\ln(\tan \frac{1}{x}) = x$.
2. Nalezněte nejmenší kladné řešení rovnice $2 \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{x} = 0$. Zkuste bez ověřování podmínek konvergence počáteční aproximace $x_0 = 1$ a $x_0 = 1,5$.

2.3.3 Metoda prosté iterace

Metodou prosté iterace najděte s přesností ϵ kořen rovnice $f(x) = 0$, který leží na zadaném intervalu. Vhodný iterační tvar najděte sami; požadavkem „najít kořen s přesností ϵ “ rozumíme požadavek zastavit výpočet, pokud se následující dvě aproximace liší o méně než ϵ .

1. $f(x) = e^x - \sin x - \frac{3}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,01$

Řešení: Při hledání iteračního tvaru $x = g(x)$ jsou možné dva postupy – buď osamostatníme e^x nebo $\sin(x)$. V prvním případě dostáváme $x = \ln(\sin(x) + \frac{3}{2})$, ve druhém $x = \arcsin(e^x + \frac{3}{2})$. Ověření podmínek konvergence znamená zkoumání funkce $g(x)$. Musíme vyšetřit její chování na intervalu $\langle a, b \rangle$, resp. najít na něm maximum absolutních hodnot derivace $f(x)$ a zjistit, jestli je menší než 1.

V případě funkce $g_1(x) = \ln(\sin(x) + \frac{3}{2})$ je $g'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \frac{3}{2}}$. Jestliže uvážíme interval $\langle 0, 1 \rangle$, je zřejmé, že podmínka splněna bude (hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ leží na tomto intervalu v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, a tedy čitatel zlomku musí být vždy menší než jmenovatel).

Při volbě počáteční aproximace $x_0 = 1$ jsou další aproximace: $x_1 = 0,8508$, $x_2 = 0,8117$, $x_3 = 0,8000$, $x_4 = 0,7963$.

V případě funkce $g_2(x) = \arcsin(e^x + \frac{3}{2})$ je $g'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x + \frac{3}{2})^2}}$. Podmínka na není splněna na žádném intervalu. *Rozmyslete si sami, zda je to možné určit bez vykreslování funkce! Na jakém intervalu je vlastně funkce $g'(x)$ definována?*

Nyní si zkuste u zbývajících zadání sami najít vhodné iterační tvary a řešení, která leží na intervalech uvedených v zadáních pro metodu půlení intervalů, resp. regula falsi. Počítejte však s tím, že v některých případech se může stát, že žádný z tvarů nebude splňovat podmínku konvergence.

2.4 Příklady ke zkoušce

Relevantnost každého výsledku následujících zadání samozřejmě musíte podepřít ověřením podmínek konvergence příslušné metody.

1. Libovolnou numerickou metodou, která byla probrána na přednášce nebo na cvičení, najděte s přesností $\epsilon = 0,01$ řešení rovnice

(a) $f(x) = e^{x-1} - (x+1)^2 + 2.$

(b) $f(x) = e^{x+1} + (x-1)^2 - 6.$

Má-li rovnice řešení více, stačí najít jen jedno z nich.

2. Je dána rovnice

(a) $(x+1)^2 + \sin 2x = 2$

(b) $(x+1)^2 + \sin 2x = 4$

S přesností $\epsilon = 0,01$ najděte jeden její záporný kořen.

3. Najděte uzavřený interval, na kterém existuje nějaké řešení rovnice (stačí jedno řešení)

(a) $\ln(x-1) + x^2 = 1$

(b) $\ln(x-1) - x^2 + 4x = 3$

a určete toto řešení s přesností na dvě desetinná místa jakoukoli metodou.

4. Newtonovou metodou s přesností na tři desetinná místa vyřešte rovnici

(a) $2x - 4 - \sin x = 0$

(b) $2x + 2 - \operatorname{arctg} x = 0$

(c) $2x - 2 - \cos x = 0$

5. Je dána rovnice $e^x + ax + b = 0$. Zvolte koeficienty a, b tak, aby tato rovnice měla právě dvě řešení, z nichž právě jedno je větší než 0. Poté vhodnou metodou toto řešení začněte hledat. Stačí, když provedete 3 kroky dané metody.
6. Je dána rovnice $e^{-x} + ax + b = 0$. Zvolte koeficienty a, b tak, aby tato rovnice měla právě dvě řešení, z nichž právě jedno je menší než 0. Poté vhodnou metodou toto řešení začněte hledat. Stačí, když provedete 3 kroky dané metody.

Kapitola 3

Soustava nelineárních rovnic

3.1 Newtonova metoda

Před tím, než začnete řešit níže uvedené příklady byste si měli podrobně nastudovat problematiku parciálních derivací funkcí více proměnných. Měli byste také umět hledat řešení soustav lineárních rovnic (i když zde budete hledat řešení pouze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých). Ačkoliv jsou ve skriptech [3] uvedeny dvě metody řešení, v této sbírce je uvedena pouze *Newtonova metoda*. Je to proto, že *metoda prosté iterace* je použitelná jen někdy – a většinou se ani nepřednáší.

V následujících příkladech vždy proveďte dva kroky Newtonovy metody vycházející ze zadané počáteční aproximace. Problematikou konvergence se nemusíte zabývat.

1. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (1, 1)$.

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 4 \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 &= 9\end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}6\delta_2 &= -5 \\ 6\delta_1 &= 0,\end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = -0,8333$, a tedy $x^{(1)} = (1; 0,1667)$. Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}0,4333\delta_2 &= -0,6944 \\ 6\delta_1 - 1,6667\delta_2 &= -0,6944,\end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,1603$, $\delta_2 = -0,1603$, a tedy $x^{(2)} = (0,8397; 0,0064)$.

2. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (1, 1)$.

$$\begin{aligned}\sin x + 2 \cos y &= 1 \\ 3 \cos x - 4 \sin y &= -2\end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0,5403\delta_1 - 1,6829\delta_2 &= -0,9221 \\ -2,5244\delta_1 - 2,1612\delta_2 &= -0,2550 \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,2887$, $\delta_2 = 0,4552$, a tedy $x^{(1)} = (0,7113; 1,4552)$. Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0,7575\delta_1 - 1,9867\delta_2 &= 0,1165 \\ -1,9585\delta_1 - 0,4613\delta_2 &= -0,2992, \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = 0,1529$, $\delta_2 = -0,0004$, a tedy $x^{(2)} = (0,8642; 1,4548)$.

3. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (-1, 1)$.

$$\begin{aligned} \sin(x + y) + e^y &= 1 \\ \cos(x - y) - \ln y &= 1 \end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \delta_1 + 3,7183\delta_2 &= -1,7183 \\ 0,9093\delta_1 - 1,9093\delta_2 &= 1,4161 \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = 0,3752$, $\delta_2 = -0,5630$, a tedy $x^{(1)} = (-0,6248; 0,4370)$. Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0,9824\delta_1 + 2,5304\delta_2 &= -0,3613 \\ 0,8732\delta_1 - 3,1617\delta_2 &= -0,3152, \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,3649$, $\delta_2 = -0,0011$, a tedy $x^{(2)} = (-0,9897; 0,4359)$.

4. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (3, 2)$.

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + y^2 &= 4 \\ (x - 4)^2 + y &= 2 \end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2\delta_1 + 4\delta_2 &= -1 \\ -2\delta_1\delta_2 &= -1 \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = 0,3$, $\delta_2 = -0,4$, a tedy $x^{(1)} = (3,3; 1,6)$. Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 2,6\delta_1 + 3,2\delta_2 &= -0,25 \\ -1,4\delta_1 + \delta_2 &= -0,09, \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = 0,0054$, $\delta_2 = -0,0825$, a tedy $x^{(2)} = (3,3054; 1,5175)$.

5. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (4, 2)$.

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 - y^2 &= 4 \\ (x - 4)^2 + y &= 2\end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}4\delta_1 - 4\delta_2 &= 4 \\ \delta_2 &= 0\end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0$, a tedy $x^{(1)} = (5; 2)$. Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}6\delta_1 - 4\delta_2 &= -1 \\ 2\delta_1 + \delta_2 &= -1,\end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,3571, \delta_2 = -0,2857$, a tedy $x^{(2)} = (4,6429; 1,7143)$.

6. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (6, 1)$.

$$\begin{aligned}x - y^2 &= 4 \\ (x - 4)^2 - y &= 2\end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\delta_1 - 2\delta_2 &= -1 \\ 4\delta_1 - \delta_2 &= -1\end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,1429, \delta_2 = 0,4286$, a tedy $x^{(1)} = (5,8571; 1,4286)$. Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}\delta_1 - 2,8571\delta_2 &= 0,1837 \\ 3,7143\delta_1 - \delta_2 &= -0,0204,\end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,0252, \delta_2 = -0,0731$, a tedy $x^{(2)} = (5,8320; 1,3555)$.

7. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (-1, -1)$.

$$\begin{aligned}x \sin y - y \cos x + e^{x+y} &= 1 \\ y \sin x - x \cos y + \ln(xy) &= 1\end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0,1353\delta_1 - 0,9453\delta_2 &= -0,5171 \\ -2,0806\delta_1 - \delta_2 &= -0,3818\end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,0743$, $\delta_2 = 0,5364$, a tedy $x^{(1)} = (-1,0743; -0,4636)$.
Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0,1753\delta_1 - 1,2224\delta_2 &= 0,0840 \\ -2,0461\delta_1 - 2,5559\delta_2 &= 0,3285 \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,0634$, $\delta_2 = -0,0778$, a tedy $x^{(2)} = (-1,1377; -0,5414)$.

8. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (1, 1)$.

$$\begin{aligned} x^2 \sin y &= 1 \\ \frac{y^2 \sin 2x}{x} &= 1 \end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1,6829\delta_1 + 0,5403\delta_2 &= 0,1585 \\ -1,7416\delta_1 + 1,8186\delta_2 &= 0,0907 \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = 0,0598$, $\delta_2 = 0,1071$, a tedy $x^{(1)} = (1,0598; 1,1071)$. Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1,8958\delta_1 + 0,5023\delta_2 &= -0,0046 \\ -2,1378\delta_1 + 1,7825\delta_2 &= 0,0132 \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,0033$, $\delta_2 = 0,0034$, a tedy $x^{(2)} = (1,0565; 1,1106)$.

9. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (-1, 1)$.

$$\begin{aligned} \ln y + e^x &= xy \\ e^x - \ln y &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1,1487\delta_1 + 1,5\delta_2 &= -0,7056 \\ 3,6487\delta_1 - 4\delta_2 &= -3,3419 \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,7782$, $\delta_2 = 0,1256$, a tedy $x^{(1)} = (-0,2782; 0,6256)$.
Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0,1315\delta_1 + 1,8767\delta_2 &= -0,4621 \\ 2,3556\delta_1 - 0,8876\delta_2 &= -0,7815, \end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,4136$, $\delta_2 = -0,2173$, a tedy $x^{(2)} = (-0,6918; 0,4083)$.

10. Počáteční aproximaci volte $x^{(0)} = (2, 1)$.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4 \\(x - 1)^2 + (y + 1)^2 &= 4\end{aligned}$$

Řešení: Po dosazení počáteční aproximace dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}4\delta_1 + 2\delta_2 &= -1 \\2\delta_1 + 4\delta_2 &= -1\end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,1667$, $\delta_2 = -0,1667$, a tedy $x^{(1)} = (1,8333; 0,8333)$. Po dosazení první aproximace dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}3,6667\delta_1 + 1,6667\delta_2 &= -0,0556 \\1,6667\delta_1 + 3,6667\delta_2 &= -0,0556,\end{aligned}$$

což znamená, že $\delta_1 = -0,0104$, $\delta_2 = -0,0104$, a tedy $x^{(2)} = (1,8229; 0,8229)$.

3.2 Otázky k zamyšlení

Ve výše uvedených příkladech je vždy volba počáteční aproximace dána. V reálných situacích však tuto volbu budete muset provést sami. Projděte výše uvedená zadání a rozmyslete si, ve kterých případech jste schopni počáteční aproximaci nalézt bez použití výpočetní techniky nebo grafické kalkulačky.

Podobně jako u jiných úloh řešených numericky (např. u hledání řešení jedné nelineární rovnice) je třeba i u soustav nelineárních rovnic ověřovat podmínky konvergence. Z časových důvodů to však v předmětech *Matematika 3* ani *Numerická matematika a pravděpodobnost* neděláme. Algoritmus přitom může být nepoužitelný z více důvodů.

Jestliže si např. vykreslíte příslušné grafy u zadání 3, můžete chtít hledat řešení, jehož obě složky jsou kladné a přitom v absolutní hodnotě nejmenší (tj. „první řešení vpravo“). Logickou volbou počáteční aproximace je potom $x^{(0)} = (3, 0)$. Tu ovšem nemůžeme použít, protože derivace druhé funkce je funkce, která není definovaná pro $y = 0$, tedy nemůžeme vytvořit příslušnou soustavu rovnic.

Dále už problematika konvergence přesahuje rámec předmětů *Matematika 3* ani *Numerická matematika a pravděpodobnost*. Všimněte si však, že při hledání tohoto řešení nemůžeme použít ani např. počáteční aproximaci $x^{(0)} = (3, 1)$ – v tomto případě totiž další aproximace jsou $x^{(1)} = (1,5353; 1)$, $x^{(2)} = (12,2070; -0,6018)$ a další aproximace jsou již komplexní. Metoda konverguje ke komplexnímu řešení této soustavy $x \doteq (13,433 - 0,9772i; -0,4278 + 0,5878i)$. Jestliže však zvolíme počáteční aproximaci $x^{(0)} = (2, 5; 0, 1)$, dostáváme řešení $x \doteq (3,1519; 0,1364)$.

Bez povšimnutí nemůžeme ponechat ani otázku zjednodušování rovnic, resp. jejich upravování. Rozmyslete si, zda např. zadání 3 a soustava

$$\begin{aligned}\sin(x + y) + e^y &= 1 \\x - y - \arccos(1 + \ln y) &= 0\end{aligned}$$

mají stejná řešení.

3.3 Příklady ke zkoušce

1. Proveďte jeden krok Newtonovy metody vedoucí k nalezení jednoho z řešení soustavy rovnic

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

Řešení vycházející z volby počáteční aproximace, která nebude podložena správným náčrtem, bude vyhodnoceno jako zcela chybné.

2. Chcete řešit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} e^{x^2-y^2} + x^2y - 1 &= 0 \\ \sin(x^2 - y) - xy^3 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Bylo zjištěno, že vhodná počáteční aproximace je $x^{(0)} = (1, 1)$. Newtonovou metodou najděte $x^{(1)}$.

3. Je dána soustava rovnic

$$x^4 + 2y^3 - x + y + 1 = 0$$

$$x^3 + 4y^2 + x - y - 5 = 0$$

Dále je dáno $x^{(0)} = (1, -1)$. Proveďte jeden krok Newtonovy metody.

4. Je dána soustava rovnic

$$x^3 + 4y^2 + x - y - 4 = 0$$

$$x^4 + 2y^3 - x + y + 2 = 0$$

Dále je dáno $x^{(0)} = (-1, 1)$. Proveďte jeden krok Newtonovy metody.

5. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k úspěšnému nalezení průsečíku kružnice se středem $S_k = [1, -1]$ a poloměrem $r = 2$ a elipsy se středem $S_e = [-2, 1]$, hlavní poloosou (tj. rovnoběžnou s osou x) $a = 2$ a vedlejší poloosou $b = 3$. Za počáteční aproximaci volte bod $[0, 1]$.
6. *Pouze pro studenty FEKT:* Proveďte dva kroky Newtonovy metody vedoucí k nalezení řešení rovnice $e^z + z^2 = 3$, kde $z \in \mathbb{C}$. Za počáteční aproximaci volte $z^{(0)} = 4 + 5i$.

Kapitola 4

Aproximace funkcí

4.1 Interpolační polynom a splajn

V následujících zadáních proložte zadanými body interpolační polynom nebo splajn požadovaného typu. V případě interpolačního polynomu můžeme postupovat dvěma způsoby – hledat ho v Lagrangeově nebo v Newtonově tvaru. V této sbírce volíme Newtonův tvar. Pokud byste chtěli polynom hledat v Lagrangeově tvaru, výsledný polynom po roznásobení samozřejmě musí být stejný.

1. Mějme následující tabulku hodnot:

x_i	1	2	2,5	4
f_i	2	1,5	0,8	2,8

Najděte pro tyto hodnoty interpolační polynom.

Řešení: Tabulka poměrných diferencí (k označuje řád difference):

x_i	f_i	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
1	2	-0,5	-0,6	0,6556
2	1,5	-1,4	1,3667	---
2,5	0,8	1,3333	---	---
4	2,8	---	---	---

Polynom je tedy

$$P_3(x) = 2 - 0,5(x - 1) - 0,6(x - 1)(x - 2) + 0,6556(x - 1)(x - 2)(x - 2,5),$$

což lze upravit na tvar

$$P_3(x) = 0,6556x^3 - 4,2058x^2 + 7,5282x - 1,978.$$

2. Mějme následující tabulku hodnot:

x_i	1	2,8	3,2	4,1	5,2
f_i	7,2	-4,1	3,9	-5,3	-6,8

Najděte pro tyto hodnoty interpolační polynom.

Řešení: Tabulka poměrných diferencí (k označuje řád difference):

x_i	f_i	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
1	7,2	-6,2778	11,9444	-11,3524	5,4487
2,8	-4,1	20,0000	-23,2479	11,5321	---
3,2	3,9	-10,222	4,4293	---	---
4,1	-5,3	-1,3636	---	---	---
5,2	-6,8	---	---	---	---

Polynom je tedy

$$P_4(x) = 7,2 - 6,2778(x-1) + 11,9444(x-1)(x-2,8) - 11,3524(x-1)(x-2,8)(x-3,2) + 5,4487(x-1)(x-2,8)(x-3,2)(x-4,1),$$

což lze upravit na tvar

$$P_4(x) = 5,4487x^4 - 71,8330x^3 + 329,3014x^2 - 598,2424x + 336,2475.$$

3. Mějme následující tabulku hodnot:

x_i	1	2,8	3,2	4,1	5,2	6,3
f_i	7,2	-4,1	3,9	-5,3	-6,8	0,5

Najděte pro tyto hodnoty interpolační polynom.

Řešení: Tabulka poměrných diferencí (k označuje řád difference):

x_i	f_i	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
1	7,2	-6,2778	11,9444	-11,3524	5,4487	-1,6635
2,8	-4,1	20,0000	-23,2479	11,5321	-3,3680	---
3,2	3,9	-10,222	4,4293	-0,2558	---	---
4,1	-5,3	-1,3636	3,6364	---	---	---
5,2	-6,8	6,6364	---	---	---	---
6,3	0,5	---	---	---	---	---

Polynom je tedy

$$P_5(x) = 7,2 - 6,2778(x-1) + 11,9444(x-1)(x-2,8) - 11,3524(x-1)(x-2,8)(x-3,2) + 5,4487(x-1)(x-2,8)(x-3,2)(x-4,1) - 1,6635(x-1)(x-2,8)(x-3,2)(x-4,1)(x-5,2),$$

což lze upravit na tvar

$$P_5(x) = -1,6635x^5 + 32,5641x^4 - 240,4808x^3 + 823,9128x^2 - 1273,7133x + 666,5806.$$

4. Mějme následující tabulku hodnot:

x_i	1,2	2,3	5,4	6,5	7,6
f_i	3,2	2,3	9,8	8,9	5,5

Najděte pro tyto hodnoty interpolační polynom.

Řešení: Tabulka poměrných diferencí (k označuje řád difference):

x_i	f_i	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
1,2	3,2	-0,8182	0,7708	-0,2909	0,0377
2,3	2,3	2,4194	-0,7708	-0,0495	---
5,4	9,8	-0,8182	-1,0331	---	---
6,5	8,9	-3,0909	---	---	---
7,6	5,5	---	---	---	---

Polynom je tedy

$$P_4(x) = 3,2 - 0,8182(x - 1,2) + 0,7708(x - 1,2)(x - 2,3) - 0,2909(x - 1,2)(x - 2,3)(x - 5,4) + 0,0377(x - 1,2)(x - 2,3)(x - 5,4)(x - 6,5),$$

což lze upravit na tvar

$$P_4(x) = 0,0377x^4 - 0,8718x^3 + 6,3589x^2 - 15,6895x + 14,2989.$$

5. Mějme následující tabulku hodnot:

x_i	0,2	2,3	5,4	6,5	7,6
f_i	3,2	2,3	9,8	8,9	5,5

Najděte pro tyto hodnoty interpolační polynom.

Řešení: Tabulka poměrných diferencí (k označuje řád difference):

x_i	f_i	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
0,2	3,2	-0,4286	0,5477	-0,2093	0,0216
2,3	2,3	2,4194	-0,7708	-0,0495	---
5,4	9,8	-0,8182	-1,0331	---	---
6,5	8,9	-3,0909	---	---	---
7,6	5,5	---	---	---	---

Polynom je tedy

$$P_4(x) = 3,2 - 0,4286(x - 0,2) + 0,5477(x - 0,2)(x - 2,3) - 0,2093(x - 0,2)(x - 2,3)(x - 5,4) + 0,0216(x - 0,2)(x - 2,3)(x - 5,4)(x - 6,5),$$

což lze upravit na tvar

$$P_4(x) = 0,0216x^4 - 0,5203x^3 + 3,6115x^2 - 6,7328x + 4,4062.$$

6. V každém z výše uvedených příkladů proložte zadanými body přirozený kubická splajn. Do jednoho obrázku poté zakreslete funkce, z nichž se splajn skládá a interpolační polynom.

4.2 Metoda nejmenších čtverců

V následujících příkladech je zadána vždy několik bodů $[x_i, y_i]$. Metodou nejmenších čtverců naleznete nejvhodnější křivku, která vystihuje zadanou závislost.

1. Najděte nejvhodnější přímku, kterou lze proložit následujícími body:

x	1	2	2,6	3,4	7,3	8,5
y	3,1	5,1	6	10,7	20,4	27,6

Řešení: Hledáme přímku $y = c_0 + c_1x$, jejíž koeficienty c_0, c_1 jsou řešením soustavy rovnic

$$6c_0 + 24,8c_1 = 72,9$$

$$24,8c_0 + 148,86c_1 = 448,8$$

Dostáváme $c_0 = -1,008$, $c_1 = 3,1816$, a tedy hledaná nejvhodnější přímka je $y = -1,008 + 3,1816x$.

2. Najděte nejvhodnější přímku, kterou lze proložit následujícími body:

x	1	2	2,6	3,4	7,3	7,3
y	3,1	3,9	4,5	5,7	7,4	7,6

Řešení: Hledáme přímku $y = c_0 + c_1x$, jejíž koeficienty c_0, c_1 jsou řešením soustavy rovnic

$$6c_0 + 23,6c_1 = 32,2$$

$$23,6c_0 + 129,9c_1 = 151,48$$

Dostáváme $c_0 = 2,7327$, $c_1 = 0,6697$, a tedy hledaná nejvhodnější přímka je $y = 2,7327 + 0,6697x$.

3. Najděte nejvhodnější přímku, kterou lze proložit následujícími body:

x	1	2	3	4	5	6
y	1	4	9	16	25	36

Řešení: Hledáme přímku $y = c_0 + c_1x$, jejíž koeficienty c_0, c_1 jsou řešením soustavy rovnic

$$6c_0 + 21c_1 = 91$$

$$21c_0 + 91c_1 = 441$$

Dostáváme $c_0 = -9,3333$, $c_1 = 7$, a tedy hledaná nejvhodnější přímka je $y = -9,3333 + 7x$. Tento postup je sice formálně správný, avšak požadavek hledat nejvhodnější přímku je poněkud zarážející, protože na první pohled je zřejmé, že hledaná závislost je $y = x^2$.

4. Najděte nejvhodnější přímku, kterou lze proložit následujícími body:

x	-1	0,2	1,3	2,1	3,15	4,1
y	-2,1	-1	0,1	1,5	2,2	3

Řešení: Hledáme přímku $y = c_0 + c_1x$, jejíž koeficienty c_0 , c_1 jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 6c_0 + 9,85c_1 &= 3,7 \\ 9,85c_0 + 33,8725c_1 &= 24,41 \end{aligned}$$

Dostáváme $c_0 = -1,0838$, $c_1 = 1,0358$, a tedy hledaná nejvhodnější přímka je $y = -1,0838 + 1,0358x$.

5. Najděte nejvhodnější křivku $y = ka^x$, kterou lze proložit následujícími body:

x	-1	0,2	1,3	2,1	3,15	4,1
y	-2,1	-1	0,1	1,5	2,2	3

Řešení: Hledáme-li nejvhodnější křivku $y = ka^x$, kterou lze proložit zadanými body, můžeme rovnici zlogaritmovat na tvar $\ln y = \ln k + x \ln a$, tj. převést problém na hledání nejvhodnější přímky $y = K + Ax$, jejíž koeficienty $K = \ln k$, $A = \ln a$ jsou řešením příslušné soustavy rovnic. V tomto případě však takto postupovat nemůžeme, protože některé ze zadaných y -ových hodnot jsou záporné.

6. Najděte nejvhodnější křivku $y = ka^x$, kterou lze proložit následujícími body:

x	0	0,2	1,3	2,1	3,15	4,1
y	2,1	1	0,1	4,5	7,2	10,3

Řešení: Hledáme-li nejvhodnější křivku $y = ka^x$, kterou lze proložit zadanými body, můžeme rovnici zlogaritmovat na tvar $\ln y = \ln k + x \ln a$, tj. převést problém na hledání nejvhodnější přímky $y = K + Ax$, jejíž koeficienty $K = \ln k$, $A = \ln a$ jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 6K + 10,85A &= 4,2497 \\ 10,85K + 32,875A &= 15,9453 \end{aligned}$$

Dostáváme $K = -1,0838$, $A = 1,0358$, a tedy $k = 0,6577$, $a = 1,8651$, tj. hledaná křivka je $y = 0,6577 \cdot 1,8651^x$.

7. Najděte nejvhodnější parabolu, kterou lze proložit následujícími body:

x	0.5	1.4	2.6	3.2	4.7	4.9	5.3
y	6	4.3	4	2.9	3.9	5.8	6.7

Řešení: Hledáme parabolu $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$, jejíž koeficienty c_0, c_1, c_2 jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 7c_0 + 22,6c_1 + 93,4c_2 &= 33,6 \\ 22,6c_0 + 93,4c_1 + 423,562c_2 &= 110,96 \\ 93,4c_0 + 423,562c_1 + 2007,9556c_2 &= 480,276 \end{aligned}$$

Dostáváme $c_0 = 7,4746, c_1 = -2,9637, c_2 = 0,5167$, a tedy hledaná nejvhodnější parabola je $y = 7,4746 - 2,9637x + 0,5167x^2$.

8. Najděte nejvhodnější parabolu, kterou lze proložit následujícími body:

x	0.5	1.4	2.6	4.7	4.9	5.3
y	6	4.3	4	3.9	5.8	6.7

Řešení: Hledáme parabolu $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$, jejíž koeficienty c_0, c_1, c_2 jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 6c_0 + 19,4c_1 + 83,16c_2 &= 30,7 \\ 19,4c_0 + 83,16c_1 + 390,794c_2 &= 101,68 \\ 83,16c_0 + 390,794c_1 + 1903,098c_2 &= 450,58 \end{aligned}$$

Dostáváme $c_0 = 7,2342, c_1 = -2,6281, c_2 = 0,4603$, a tedy hledaná nejvhodnější parabola je $y = 7,2342 - 2,6281x + 0,4603x^2$.

9. Najděte nejvhodnější parabolu, kterou lze proložit následujícími body:

x	1.4	2.6	4.7	4.9	5.3
y	4.3	4	3.9	5.8	6.7

Řešení: Hledáme parabolu $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$, jejíž koeficienty c_0, c_1, c_2 jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 4c_0 + 18,9c_1 + 82,91c_2 &= 24,7 \\ 18,9c_0 + 82,91c_1 + 390,669c_2 &= 98,68 \\ 82,91c_0 + 390,669c_1 + 1903,0355c_2 &= 449,08 \end{aligned}$$

Dostáváme $c_0 = 7,5167, c_1 = -2,8182, c_2 = 0,4870$, a tedy hledaná nejvhodnější parabola je $y = 7,5167 - 2,8182x + 0,4870x^2$.

10. Najděte nejvhodnější parabolu, kterou lze proložit následujícími body:

x	2.6	4.7	4.9	5.3
y	4	3.9	5.8	6.7

Řešení: Hledáme parabolu $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$, jejíž koeficienty c_0, c_1, c_2 jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 4c_0 + 17,5c_1 + 80,95c_2 &= 20,4 \\ 17,5c_0 + 80,95c_1 + 387,925c_2 &= 92,66 \\ 80,95c_0 + 387,925c_1 + 1899,1939c_2 &= 440,652 \end{aligned}$$

Dostáváme $c_0 = 21,4122, c_1 = -10,5155, c_2 = 1,4672$, a tedy hledaná nejvhodnější parabola je $y = 21,4122 - 10,5155x + 1,4672x^2$.

4.3 Otázky k zamyšlení

Všechna výše uvedená zadání opět nevyžadují jakoukoliv invenci na straně řešitele – vše je zadáno, příslušné vzorce jsou známy ze skript, vlastní výpočet obstará vhodná kalkulačka, případně PC. Je třeba si však uvědomit, že před vlastním hledáním nejvhodnější aproximace pro získané hodnoty musíte znát odpověď na několik otázek:

1. Jakou povahu tyto hodnoty mají? Tj. jsou získané experimentálně (pak použijeme *metodu nejmenších čtverců*) nebo jsou směrodatné (pak budeme hledat *interpoláčn  polynom nebo splajn*)?
2. Jestliže byly tyto hodnoty získány experimentálně, jakou závislost vykazují veličiny, s jejichž hodnotami pracujeme? Všimněte si např. zadání 3, kde je tento problém doveden až do extrému – je v tomto zadání ze zkušenosti, resp. reálné situace, opravdu zřejmé, že závislost je kvadratická? Přitom možnosti *přímka – parabola – křivka* $y = ka^x$ zdaleka nevyčerpávají všechny možné typy závislostí.
3. Co se stane, když ke známým bodům přidáme další, resp. nějaký od nich odebereme? Všimněte si např. situace v zadáních 7 – 10. Jedná se o body, od nichž v každém následujícím zadání vždy po jednom odebíráme. *Vykreslete si všechny nalezené paraboly do jednoho obrázku!*
4. Jestliže v průběhu výpočtu dojdeme k požadavku hledat řešení soustavy lineárních rovnic, jak ho splníme? Jakou zvolíme metodu? Jak ověříme, že toto řešení existuje právě jedno? Jaká vůbec bude přesnost výpočtu, když se nepřesností dopouštíme na několika místech?
5. Jak převedeme interpoláčn  polynom, nalezený ať už v Lagrangeově nebo v Newtonově tvaru, do tvaru $P_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$?

Navíc byste samozřejmě měli být schopni rozhodnout, zda nějaký zadaný polynom je nebo není interpoláčn m polynomem, resp. zda zadaná soustava polynomů je nebo není splajnem požadovaného typu.

4.4 Příklady ke zkoušce

1. Je dána soustava polynomů. Rozhodněte, zda se jedná o kubický splajn. *Není třeba ověřovat, zda se jedná o přirozený kubický splajn. Slovem „rozhodněte“ se rozumí, že své závěry správným a úplným způsobem zdůvodníte.*

(a)

$$\begin{aligned} S_0(x) &= x^3 \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ S_1(x) &= 3x^3 - 2 \text{ pro } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ S_2(x) &= 2x^3 + 6 \text{ pro } x \in \langle 2, 3 \rangle \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} S_0(x) &= 2x^3 \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ S_1(x) &= x^3 + 1 \text{ pro } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ S_2(x) &= 2x^3 - 7 \text{ pro } x \in \langle 2, 3 \rangle \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} S_0(x) &= 2x^3 + x \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ S_1(x) &= x^3 + 2 \text{ pro } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ S_2(x) &= x^3 + x \text{ pro } x \in \langle 2, 3 \rangle \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} S_0(x) &= x^3 + x^2 \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ S_1(x) &= 2x^3 \text{ pro } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ S_2(x) &= x^3 + x^2 + 2x \text{ pro } x \in \langle 2, 3 \rangle \end{aligned}$$

2. Při jistém měření jste získali následující dvojice hodnot:

x	0,5	1,2	2	2,3	2,5	2,9
y	3	5	6,4	7,2	7,6	8,7

Ze zkušenosti víte, že závislost veličiny y na veličině x je lineární. Určete ji.

3. V uzlových bodech x_i jsme získali následující hodnoty y_i . Najděte **bud'** nejvhodnější křivku $y = k \cdot a^x$ **nebo** nejvhodnější parabolu, kterou lze vystihnout závislost y na x . *Obě možnosti jsou pro účely zkoušky chápány jako rovnocenné, zvolte si právě jednu. Ať si vyberete kteroukoliv možnost, za svůj výběr nebudete ze strany vyučujících nijak penalizováni. Maximální bodové hodnocení za tento příklad je 10 bodů, a to i v případě, že si vyberete obě možnosti současně.*

(a)

x_i	1	2	3	4
y_i	1	2	4	8

(b)

x_i	1	2	3	4
y_i	4	8	16	32

4. Jsou dány tyto body v rovině:

x	-1	1	2	a
y	-0,364	4,356	22,016	0

Doplňte a (s přesností na 2 desetinná místa) tak, aby polynom $P_3(x) = x^3 + 3,1x^2 + 1,36x - 1,104$ byl interpolačním polynomelem pro výše uvedené body. *Hodnoty v řádce x přitom nemusejí být uspořádány vzestupně!*

5. Metodou nejmenších čtverců aproximujte pomocí **paraboly** funkci zadanou tabulkou bodů:

(a)

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1,2	1,4	-2	-1	1

(b)

x_i	-3	-1	0	1	3
y_i	1	0	-0,4	2	3,8

Kapitola 5

Numerická integrace

5.1 Složená lichoběžníková a Simpsonova metoda

Lichoběžníkovou a poté Simpsonovou metodou pro dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ až na 8 subintervalů numericky určete $\int_a^b f(x)dx$. Ve výsledcích dolní index označuje počet částí intervalu.

U Simpsonovy metody jsou z tohoto důvodu uvedeny pouze sudé indexy.

1. $f(x) = x^3 + x^2 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $a = -3$, $b = -1$

Řešení: Hodnoty získané lichoběžníkovou metodou jsou: $x_1 = -16,4444$, $x_2 = -10,9722$, $x_3 = -9,9371$, $x_4 = -9,5717$, $x_5 = -9,4018$, $x_6 = -9,3094$, $x_7 = -9,2536$, $x_8 = -9,2173$

Hodnoty získané Simpsonovou metodou jsou: $x_2 = -9,1481$, $x_4 = -9,1048$, $x_6 = -9,1002$, $x_8 = -9,0992$.

Úprava zadání: Stejnou funkci integrujte na intervalu $\langle -3, 1 \rangle$.

Řešení: Funkce na tomto intervalu není spojitá, proto je tento požadavek nesmyslný. Z analýzy víme, že integrál diverguje – pokud bychom si tuto skutečnost však neuvědomili a počítali numericky, nestane se při kombinaci metody a dělení intervalu takové, že dělicím bodem není nula, na pohled vůbec nic zvláštního. Např. lichoběžníková metoda pro $m = 2$ dává výsledek $-16,4444$, pro $m = 6$ výsledek $-21,7889$ atd. *Tyto „výsledky“ jsou však naprosto zcestné!*

2. $f(x) = \sin x + \cos x + e^x$, $a = -1$, $b = 1$

Řešení: Hodnoty získané lichoběžníkovou metodou jsou: $x_1 = 4,1668$, $x_2 = 4,0834$, $x_3 = 4,0570$, $x_4 = 4,0469$, $x_5 = 4,0421$, $x_6 = 4,0395$, $x_7 = 4,0378$, $x_8 = 4,0368$

Hodnoty získané Simpsonovou metodou jsou: $x_2 = 4,0556$, $x_4 = 4,0347$, $x_6 = 4,0336$, $x_8 = 4,0334$.

3. $f(x) = x \sin x \cos x$, $a = -1$, $b = 1$

Řešení: Hodnoty získané *lichoběžníkovou metodou* jsou: $x_1 = 0,9093$, $x_2 = 0,4546$,
 $x_3 = 0,4405$, $x_4 = 0,4377$, $x_5 = 0,4367$, $x_6 = 0,4362$, $x_7 = 0,4360$, $x_8 =$
 $0,4358$

Hodnoty získané *Simpsonovou metodou* jsou: $x_2 = 0,3031$, $x_4 = 0,4320$, $x_6 =$
 $0,4348$, $x_8 = 0,4352$.

4. $f(x) = \arctg x$, $a = 2$, $b = 3$

Řešení: Hodnoty získané *lichoběžníkovou metodou* jsou: $x_1 = 1,1781$, $x_2 = 1,1842$,
 $x_3 = 1,1853$, $x_4 = 1,1857$, $x_5 = 1,1859$, $x_6 = 1,1860$, $x_7 = 1,1861$, $x_8 =$
 $1,1861$

Hodnoty získané *Simpsonovou metodou* jsou: $x_2 = 1,1862$, $x_4 = 1,1863$, $x_6 =$
 $1,1863$, $x_8 = 1,1863$.

5. $f(x) = \frac{10}{x^2+4} + 2 \sin x$, $a = -3$, $b = -1$

Řešení: Hodnoty získané *lichoběžníkovou metodou* jsou: $x_1 = 0,8040$,
 $x_2 = -0,1666$, $x_3 = -0,3338$, $x_4 = -0,3914$, $x_5 = -0,4180$, $x_6 = -0,4323$,
 $x_7 = -0,4410$, $x_8 = -0,4466$

Hodnoty získané *Simpsonovou metodou* jsou: $x_2 = -0,4901$, $x_4 = -0,4664$,
 $x_6 = -0,4652$, $x_8 = -0,4650$.

6. $f(x) = \ln \frac{x-4}{\sin x} + e^x$, $a = -3$, $b = -1$

Řešení: Hodnoty získané *lichoběžníkovou metodou* jsou: $x_1 = 6,1038$, $x_2 = 5,0741$,
 $x_3 = 4,8313$, $x_4 = 4,7359$, $x_5 = 4,6884$, $x_6 = 4,6614$, $x_7 = 4,6446$, $x_8 =$
 $4,6334$

Hodnoty získané *Simpsonovou metodou* jsou: $x_2 = 4,7308$, $x_4 = 4,6231$, $x_6 =$
 $4,6048$, $x_8 = 4,5992$.

7. $f(x) = \frac{x}{e^x + \sin x}$, $a = -2$, $b = 2$

Řešení: Hodnoty získané *lichoběžníkovou metodou* jsou: $x_1 = 5,6502$, $x_2 = 2,8251$,
 $x_3 = 10,6992$, $x_4 = 3,8050$, $x_5 = 1,9085$, $x_6 = 6,7910$, $x_7 = 3,4414$, $x_8 =$
 $1,1585$ – *ovšem POZOR!* – *tyto hodnoty (i když správné) jsou naprosto zcestné!*
Sami si zjistěte, proč tomu tak je.

8. $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $a = 1$, $b = 2$

Řešení: Hodnoty získané *lichoběžníkovou metodou* jsou: $x_1 = 0,3193$, $x_2 = 0,3270$,
 $x_3 = 0,3285$, $x_4 = 0,3291$, $x_5 = 0,3293$, $x_6 = 0,3294$, $x_7 = 0,3295$, $x_8 =$
 $0,3296$

Hodnoty získané *Simpsonovou metodou* jsou: $x_2 = 0,32962$, $x_4 = 0,3297$,
 $x_6 = 0,3298$, $x_8 = 0,3298$.

9. $f(x) = x^2 - x + \cos 3x - 4$, $a = 0$, $b = 1$

Řešení: Hodnoty získané *lichoběžníkovou metodou* jsou: $x_1 = -0,0567$, $x_2 = -0,5539$, $x_3 = -0,6358$, $x_4 = -0,6638$, $x_5 = -0,6767$, $x_6 = -0,6836$, $x_7 = -0,6878$, $x_8 = -0,6906$
 Hodnoty získané *Simpsonovou metodou* jsou: $x_2 = -0,7197$, $x_4 = -0,7004$, $x_6 = -0,6996$, $x_8 = -0,6995$.

10. $f(x) = x^2 - x + \cos 3x - 4$, $a = 0$, $b = 2$

Řešení: Hodnoty získané *lichoběžníkovou metodou* jsou: $x_1 = 0,9302$, $x_2 = 1,0054$, $x_3 = 0,8475$, $x_4 = 0,7909$, $x_5 = 0,7646$, $x_6 = 0,7502$, $x_7 = 0,7416$, $x_8 = 0,7359$
 Hodnoty získané *Simpsonovou metodou* jsou: $x_2 = 1,0305$, $x_4 = 0,7194$, $x_6 = 0,7178$, $x_8 = 0,7176$.

5.2 Otázky k zamyšlení

V souvislosti s numerickou integrací je třeba znát analytickou definici pojmů *neurčitý* a *určitý integrál* a způsob práce při numerickém integrování. Zejména je třeba znát definiční obor funkce, kterou integrujeme, resp. vědět, zda je funkce na daném intervalu vůbec integrace schopna (viz např. úprava zadání 1). *U všech výše uvedených příkladů si proto stanovte definiční obory příslušných funkcí.*

Metodami numerické integrace určujeme integrál jako součet obsahů jistých geometrických obrazců. To způsobuje, že se při numerickém řešení dopouštíme nepřesností a chyb. Jejich velikost souvisí s průběhem funkce na daném(ých) intervalu(ech). *Všechny výše uvedené funkce si proto vykreslete, navrhněte nejvhodnější dělení intervalu, resp. pomocí grafů vysvětlete rozdíly mezi výsledky u jednotlivých dělení a metod.*

Z prvního semestru znáte pozadí analytické definice pojmů *neurčitý* a *určitý integrál*. Zkuste proto navrhnout postupy, jak jinak lze numericky určit (přesnější?) výsledek. *Určete si například, které z výše uvedených funkcí jsou sudé a jak lze tohoto faktu využít.*

5.3 Příklady ke zkoušce

1. Některou z numerických metod vypočtěte

(a) $\int_{-0,5}^{0,7} 3 \cos 2x dx$

(b) $\int_{-0,7}^{0,5} 2 \cos 2x dx$

(c) $\int_{-0,6}^{0,6} 3 \cos 2x dx \int_{-0,8}^{0,4} 2 \cos 2x dx$

Uveďte, jakou metodu používáte. *Výsledek, který se bude od skutečné hodnoty integrálu lišit o více než 20%, bude vyhodnocen jako chybný. Pokud neuvedete, jakou*

metodou příklad řešíte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.

2. Vypočtete

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{x}{7} dx$$

- a) přesně, tj. analyticky,
- b) s přesností 0,0001 Simpsonovou metodou.

3. Vypočtete

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{x}{9} dx$$

- a) přesně, tj. analyticky,
- b) s přesností 0,0001 Simpsonovou metodou.

4. Složenou Simpsonovou metodou pro $m = 4$ vypočtete

(a) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sin x} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{1+\cos x} dx$

(c) $\int_1^3 \frac{1}{1+\sin x} dx$

(d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\cos x} dx$

5. Je dána náhodná veličina $X \sim \text{Exp}(2)$. Složenou lichoběžníkovou metodou pro $m = 4$ vypočtete $P(X < 2)$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek. Výsledek získaný jiným způsobem může sloužit nanejvýš pro vaši potřebu jako jistá „kontrola“ správnosti výpočtu.*¹

¹K řešení tohoto příkladu potřebujete znát funkci hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny, která má exponenciální rozdělení (viz část *pravděpodobnost a statistika*). Pokud si uvědomíte tento fakt, je zadání příkladu stejné jako všech předcházejících. Numericky získaný výsledek tohoto – nebo podobných – zadání byste měli umět vysvětlit.

Kapitola 6

Obyčejné diferenciální rovnice

Podobně jako v některých předcházejících kapitolách jsou i v této uvedena zadání, která se kryjí se zadáními příkladů ve sbírce [2].¹ Ve sbírce [2] jsou však tyto počáteční úlohy řešeny vícekrokovými metodami – z jednokrokových je v ní uvedena pouze *metoda Runge-Kutty 4. řádu*, a to jen jako nástroj pro vícekrokové metody (navíc bez potřebných mezivýsledků).

6.1 Jednokrokové metody

Následující počáteční úlohy řešte na intervalu $\langle a, b \rangle$ s krokem h , a to vždy nejprve Eulerovou metodou, potom jejími modifikacemi a nakonec metodou Runge-Kutty 4. řádu.

1. $y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0, 2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0, 2	0, 4	0, 6	0, 8	1
<i>Euler</i>	1	0, 8	0, 648	0, 5504	0, 5123	0, 5379
<i>Euler, 1. modifikace</i>	1	0, 822	0, 6912	0, 6136	0, 5940	0, 6363
<i>Euler, 2. modifikace</i>	1	0, 824	0, 6949	0, 6186	0, 6001	0, 6432
<i>Runge-Kutta</i>	1	0, 8213	0, 6897	0, 6112	0, 5907	0, 6321

2. $y' = x^2 + 4y$, $y(0) = 0$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0, 2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0, 2	0, 4	0, 6	0, 8	1
<i>Euler</i>	0	0, 0	0, 0080	0, 0464	0, 1555	0, 4079
<i>Euler, 1. modifikace</i>	0	0, 002	0, 0254	0, 1167	0, 3743	1, 0067
<i>Euler, 2. modifikace</i>	0	0, 004	0, 0317	0, 1320	0, 4086	1, 0813
<i>Runge-Kutta</i>	0	0, 0033	0, 0334	0, 1476	0, 4731	1, 2926

¹V této kapitole se jedná pouze o některá zadání.

3. $y' = e^x + y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Euler</i>	1	1,4	1,9243	2,6075	3,4934	4,6372
<i>Euler, 1. modifikace</i>	1	1,4610	2,0769	2,8934	3,9691	5,3910
<i>Euler, 2. modifikace</i>	1	1,4621	2,0796	2,8983	3,9771	5,3910
<i>Runge-Kutta</i>	1	1,4657	2,0885	2,9154	4,0059	5,4365

4. $y' = e^{x+1} - 2y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Euler</i>	1	1,1437	1,3502	1,6212	1,9633	2,3879
<i>Euler, 1. modifikace</i>	1	1,1721	1,3981	1,6848	2,0424	2,4840
<i>Euler, 2. modifikace</i>	1	1,1751	1,4038	1,6932	2,0535	2,4983
<i>Runge-Kutta</i>	1	1,1697	1,3940	1,6794	2,0356	2,4759

5. $y' = e^{\frac{x}{2}} + 4y$, $y(0) = 0$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Euler</i>	0	0,2	0,581	1,2901	2,5922	4,9644
<i>Euler, 1. modifikace</i>	0	0,2903	0,9361	2,3391	5,3507	11,7764
<i>Euler, 2. modifikace</i>	0	0,2905	0,9370	2,3412	5,3555	11,7871
<i>Runge-Kutta</i>	0	0,3192	1,0622	2,7506	6,5439	15,0193

6. $y' = e^{x^2} + y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Euler</i>	1	1,4	1,8882	2,5005	3,2873	4,3240
<i>Euler, 1. modifikace</i>	1	1,442	1,9989	2,7189	3,6722	4,9676
<i>Euler, 2. modifikace</i>	1	1,4441	2,0040	2,7291	3,6911	5,0026
<i>Runge-Kutta</i>	1	1,4456	2,0084	2,7379	3,7061	5,0257

7. $y' = e^{x^2} - y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Euler</i>	1	1	1,0082	1,0412	1,1197	1,2750
<i>Euler, 1. modifikace</i>	1	1,002	1,0197	1,0695	1,1748	1,3750
<i>Euler, 2. modifikace</i>	1	1,0041	1,0240	1,0769	1,1873	1,3972
<i>Runge-Kutta</i>	1	1,0026	1,0204	1,0701	1,1754	1,3759

8. $y' = x^3 - 4y$, $y(0) = 1$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Euler</i>	1	0,2	0,0416	0,0211	0,0474	0,1119
<i>Euler, 1. modifikace</i>	1	0,5202	0,2753	0,1630	0,1361	0,1756
<i>Euler, 2. modifikace</i>	1	0,5208	0,2774	0,1671	0,1424	0,1843
<i>Runge-Kutta</i>	1	0,4521	0,2089	0,1137	0,1024	0,1524

9. $y' = \frac{1}{2}x + y$, $y(0) = 2$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Euler</i>	2	2,4	2,9	3,52	4,284	5,2208
<i>Euler, 1. modifikace</i>	2	2,45	3,021	3,7396	4,6383	5,7568
<i>Euler, 2. modifikace</i>	2	2,45	3,021	3,7396	4,6383	5,7568
<i>Runge-Kutta</i>	2	2,4535	3,0295	3,7553	4,6638	5,7956

10. $y' = \frac{1}{10}x + y$, $y(0) = 2$, na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$

Řešení: Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
<i>Euler</i>	2	2,4	2,884	3,4688	4,1746	5,0255
<i>Euler, 1. modifikace</i>	2	2,4420	2,9856	3,6533	4,4722	5,4757
<i>Euler, 2. modifikace</i>	2	2,4420	2,9856	3,6533	4,4722	5,4757
<i>Runge-Kutta</i>	2	2,4449	2,9928	3,6664	4,4936	5,5083

6.2 Otázky k zamyšlení

Výše uvedená zadání slouží k procvičení čistě mechanického dosazování do algoritmů probíraných numerických metod. Ve skutečnosti si však před vlastním řešením musíme

položít několik otázek:

1. Na jakém intervalu chceme řešení počáteční úlohy najít? Jak v tom případě vhodně rozdělit interval? Jakých chyb se při kombinaci *zvolená metoda – interval dané délky – dělení intervalu* dopustíme? Nebude se chyba kumulovat nad únosnou mez?
2. Existuje vůbec na požadovaném intervalu jednoznačné řešení zadané počáteční úlohy? Má toto řešení nějakou výpověď hodnotu?²
3. Je vůbec možné počáteční úlohu (na zadaném intervalu) řešit numericky?³
4. Výsledkem použití výše uvedených numerických metod jsou body v rovině. Jakým způsobem z nich získáme funkční předpis? *Pozor na velice rozšířenou snahu spojovat body úsečkami! Jsou situace, kdy tento postup má své opodstatnění, ale ve většině případů použití jde o naprostý k ničemu nepoužitelný nesmysl!*

6.3 Příklady ke zkoušce

1. Je dána počáteční úloha $y' = e^{3x} + 2y$, $y(0) = 2$. Metodou Runge-Kutta 4. řádu s krokem $h = 0,2$ určete $y(0,4)$.
2. Je dána počáteční úloha $y' = e^{3x} + 3y$, $y(0,2) = 1$. Metodou Runge-Kutta 4. řádu s krokem $h = 0,2$ určete $y(0,6)$.
3. Libovolnou metodou najděte na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ s krokem $h = 0,1$ řešení počáteční úlohy $y' = x^3 + 2y$, $y(0) = 1$.
4. Libovolnou metodou najděte na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ s krokem $h = 0,1$ řešení počáteční úlohy $y' = x^3 + 2y$, $y(0) = 2$.
5. Je dána diferenciální rovnice $y' = y(x - 3)$ s počáteční podmínkou $y(4) = 2$. Eulerovou metodou s krokem $h = 0,2$ nalezněte řešení na intervalu $\langle 4;5 \rangle$.

²Odpověď na druhou otázku přesahuje rámec bakalářského studia.

³Odpověď na tuto otázku přesahuje rámec bakalářského studia. V učebním textu [1] je uveden příklad, kdy je odpověď záporná, přitom nalezení analytického řešení není příliš obtížné.

Literatura

- [1] BAŠTINEC, J., NOVÁK, M.: *Moderní numerické metody*. Skriptum FEKT VUT v Brně. [PDF]
- [2] BAŠTINEC, J., NOVÁK, M.: *Moderní numerické metody. Sbírka příkladů*. Skriptum FEKT VUT v Brně. [PDF]
- [3] FAJMON, B., RŮŽIČKOVÁ, I.: *Matematika 3*. Skriptum FEKT VUT v Brně. [PDF]
- [4] HLAVIČKOVÁ, I., HLINĚNÁ, D.: *Matematika 3. Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a statistiky*. Skriptum FEKT VUT v Brně. [PDF]
- [5] KOLÁŘOVÁ, E.: *Matematika 2. Sbírka příkladů*. Skriptum FEKT VUT v Brně. [PDF]