VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

MATEMATIKA 2

Sbírka úloh

RNDr. Edita Kolářová

ÚSTAV MATEMATIKY

Úvod

Dostali jste do rukou sbírku příkladů k přednášce Matematika 2. Tato sbírka je doplněním textu Matematika 2. Navazuje na teoretický výklad látky z této knihy. Zároveň jsem se ale snažila uvést do této sbírky všechny důležité vzorce, které při řešení příkladů využívám, abyste po prostudování příslušných kapitol z knihy Matematika 2 mohli sbírku používat i samostatně. Je zde řada příkladů řešených detailně, u dalších jsou uvedené výsledky, případně rady a návody.

Studijní jednotky jsou navrženy tak, aby obsahovaly látku, která spolu úzce souvisí, a je možné je pochopit a nastudovat najednou jako celek.

Předpokládám, že jste už úspěšně zvládli předmět Matematika 1, ovládáte základy diferenciálního a integrálního počtu funkce jedné proměnné, diferenciální počet funkce více proměnných a máte základní poznatky o řadách.

Obsah

STUDIJNÍ JEDNOTKA

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

Cíle studijní jednotky. K této studijní jednotce potřebujete znát diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné. Začátek je krátký úvod do teorie diferenciálních rovnic. Procvičíte si základní pojmy jako diferenciální rovnice, obecné řešení, partikulární řešení. Potom se naučíte řešit dva typy rovnic prvního řádu: separovatelnou a lineární. Na konci této jednotky najdete různé úlohy, kde si můžete vyzkoušet, zda dokážete jednotlivé typy rovnic nejen řešit, ale také od sebe rozlišit.

1 Diferenciální rovnice prvního řádu

1.1 Základní pojmy

Obyčejná diferenciální rovnice — rovnice, v níž se vyskytuje derivace neznámé funkce jedné proměnné.

Řád diferenciální rovnice — řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Řešit diferenciální rovnici — najít všechny funkce, které vyhovují dané rovnici.

Obecné řešení diferenciální rovnice n-tého řádu — řešení, které závisí na n různých parametrech takovým způsobem, že všechna řešení rovnice můžeme získat vhodnou volbou těchto konstant.

Partikulární řešení diferenciální rovnice n-tého řádu — řešení, které dostaneme z obecního řešení konkrétní volbou všech n parametrů.

Integrální křivka — řešení diferenciální rovnice, graf řešení diferenciální rovnice.

Počáteční úloha — problém najít partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje tzv. počáteční podmínky.

Může se stát, že diferenciální rovnice nemá žádné řešení. Diferenciální rovnice, s nimiž se zde setkáte, řešení mají. Obecné podmínky pro existenci řešení najdete v Matematice 2.

Příklad 1.1.1. *Najděte obecné řešení diferenciální rovnice* $y''' = 18\, e^{3x} + \sin x$.

Řešení: Je to obyčejná diferenciální rovnice třetího řádu, velmi speciální, protože pravá strana závisí pouze na x. Řešení dostaneme postupným integrováním.

$y''' = 18\, e^{3x} + \sin x \quad \Rightarrow \quad y'' = \int (18\, e^{3x} + \sin x)\, \mathrm{d}x = 6\, e^{3x} - \cos x + C_1,$

$y' = \int (6\, e^{3x} - \cos x + C_1)\, \mathrm{d}x = 2\, e^{3x} - \sin x + C_1 x + C_2.$

A konečně obecné řešení bude

$$y = \int (2\, e^{3x} - \sin x + C_1 x + C_2)\, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{2}{3}\, e^{3x} + \cos x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3}}.$$

Protože šlo o rovnici třetího řádu, jsou v obecném řešení tři parametry. Dosazením konkrétních hodnot za konstanty C_1, C_2, C_3 se dostanou partikulární řešení této rovnice.

Příklad 1.1.2. *Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice* $y'' = 12\, x^3 + 8$, *které splňuje počáteční podmínky* $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Řešení: Je li $y'' = 12\, x^3 + 8$, potom $y' = \int (12\, x^3 + 8)\, \mathrm{d}x = 3\, x^4 + 8\, x + C_1$.

Obecné řešení bude $y = \int (3\, x^4 + 8x + C_1)\, \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\, x^5 + 4\, x^2 + C_1 x + C_2$.

Konstanty budeme počítat dosazením počátečních podmínek do y a y' :

$$0 = y(0) = \frac{3}{5}\, 0^5 + 4 \cdot 0^2 + C_1 0 + C_2 = C_2; \quad 1 = y'(0) = 3 \cdot 0^4 + 8 \cdot 0 + C_1 = C_1.$$

Z této soustavy rovnic dostaneme $C_1 = 1,\ C_2 = 0$.

Hledané partikulární řešení je $\underline{\underline{y = \frac{3}{5}\, x^5 + 4x^2 + x}}$.

Příklad 1.1.3. *Najděte integrální křivku rovnice* $y' = \operatorname{tg} x$, *která prochází bodem [0,1].*

Řešení: Integrální křivka procházející daným bodem je partikulární řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$.

$$y' = \operatorname{tg} x \Rightarrow y = \int \operatorname{tg} x\, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = -\int \frac{(-\sin x)}{\cos x}\, \mathrm{d}x =$$

$$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$$

Obecné řešení je $y = -\ln|\cos x| + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k$ celé.

Dále $1 = y(0) = -\ln|\cos 0| + C = 0 + C$. Dostali jsme, že $C = 1$.

Potom hledané řešení je $\underline{\underline{y = 1 - \ln|\cos x|}}$.

Příklad 1.1.4. *Ukažte, že funkce* $y = C_1 + C_2\,x + C_3\,e^{3x}$ *je obecné řešení rovnice* $y''' - 3\,y'' = 0$, *a najděte partikulární řešení, pro které* $y(0) = 3,\ y'(0) = 6,\ y''(0) = 18$.

Řešení: $y' = C_2 + 3\,C_3\,e^{3x}, \quad y'' = 9\,C_3\,e^{3x}, \quad y''' = 27\,C_3\,e^{3x}$.

Po dosazení $y''' - 3\,y'' = 27\,C_3\,e^{3x} - 3 \cdot 9\,C_3\,e^{3x} = 0$.

Dále $3 = y(0) = C_1 + C_3, \quad 6 = y'(0) = C_2 + 3\,C_3, \quad 18 = y''(0) = 9\,C_3$.

Řešíme soustavu rovnic: $C_1 + C_3 = 3, \quad C_2 + 3\,C_3 = 6, \quad 9\,C_3 = 18$.

Z toho $C_1 = 1,\ C_2 = 0,\ C_3 = 2$. Hledané partikulární řešení je $\underline{\underline{y = 1 + 2\,e^{3x}}}$.

Příklad 1.1.5. *Ukažte, že funkce* $y = C_1\,(x^2+1) + C_2\,(x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x)$ *je obecné řešení rovnice* $(x^2+1)\,y'' - 2y = 0$, *a najděte partikulární řešení této rovnice, pro které platí* $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Řešení: $y' = C_1 \cdot 2x + C_2\left(1 + 2x\operatorname{arctg} x + \frac{x^2+1}{x^2+1}\right) = C_1 \cdot 2x + C_2(2 + 2x\operatorname{arctg} x)$,

$y'' = 2C_1 + C_2\left(2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{x^2+1}\right)$.

Po dosazení dostaneme:

$$(x^2+1)\,y'' - 2y =$$

$$2(x^2+1)C_1 + C_2\left(2\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x + 2x\right) - 2C_1(x^2+1) - 2C_2\left(x + \left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x\right) = 0.$$

Funkce řeší diferenciální rovnici. Dále dosadíme počáteční podmínky

$1 = y(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$,

$0 = y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot C_1 + 2\,C_2 = 2\,C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$.

Hledané partikulární řešení je $\underline{\underline{y = x^2 + 1}}$.

Příklad 1.1.6. *Ukažte, že funkce* $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x}$ *je obecné řešení rovnice* $y'' + y = 5\,e^{2x}$, *a najděte partikulární řešení, pro která platí*

a) $y(0) = 6,\ y'(0) = 6$ *b)* $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

c) $y(0) = \frac{3}{2},\ y'(0) = \frac{5}{2}$ *d)* $y(\frac{\pi}{2}) = e^{\pi},\ y'(\frac{\pi}{2}) = 2e^{\pi} - 1$

Řešení: *a)* $y = 5\cos x + 4\sin x + e^{2x}$; *b)* $y = e^{2x} - 3\sin x$;
c) $y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + e^{2x}$; *d)* $y = \cos x + e^{2x}$.

Příklad 1.1.7. *Ukažte, že funkce* $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}$ *je obecné řešení rovnice* $y''' - 3y' + 2y = 0$, *a najděte partikulární řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínky* $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 11$.

Řešení: $y = -e^x + 4xe^x + e^{-2x}$

Další část této jednotky bude věnovaná diferenciálním rovnicím prvního řádu. Naučíte se řešit dva typy rovnic prvního řádu.

1.2 Separovatelné diferenciální rovnice

Separovatelná diferenciální rovnice — rovnice, která se dá upravit na tvar

$$y' = f(x) \cdot g(y).$$

Pokud rozpoznáte separovatelnou rovnici postupujte při řešení následovně:

1. y' nahraďte výrazem $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;
2. celou rovnici vynásobte $\mathrm{d}x$;
3. odseparujte proměnné, tzn. členy, které obsahují y, převeďte na levou stranu rovnice spolu s $\mathrm{d}y$ a členy, které obsahují x, převeďte na pravou stranu spolu s $\mathrm{d}x$;
4. integrujte obě strany poslední rovnice.

Příklad 1.2.1. *Řešte separovatelnou diferenciální rovnici* $y' = \dfrac{1-2x}{y^3}$.

Řešení: Postupujeme podle návodu: 1.) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1-2x}{y^3}$

2.) $\mathrm{d}y = \dfrac{1-2x}{y^3}\,\mathrm{d}x$

3.) $y^3\,\mathrm{d}y = (1-2x)\,\mathrm{d}x$

4.) $\displaystyle\int y^3\,\mathrm{d}y = \int (1-2x)\,\mathrm{d}x$

Z toho po integrování dostaneme $\frac{y^4}{4} + C = x - x^2 + K$, kde C a K jsou integrační konstanty. Převedeme-li konstantu C na pravou stranu, dostaneme řešení ve tvaru $\frac{y^4}{4} = x - x^2 + K - C$. Označíme konstantu $K - C = c$ a dostaneme obecné řešení rovnice

$$\underline{\underline{\frac{y^4}{4} = x - x^2 + c.}}$$

Tuto úpravu s konstantami můžete udělat pokaždé, a proto stačí psát integrační konstantu pouze jednou (obyčejně ji píšeme do pravé strany).

Řešení, která se dostanou při řešení separovatelné rovnice, jsou obvykle v **implicitním tvaru**. Úpravou se někdy podaří získat **explicitní tvar** řešení $y = \varphi(x)$.

Příklad 1.2.2. *Řešte separovatelnou diferenciální rovnici* $(1+y^2)\,\mathrm{d}x + (1+x^2)\,\mathrm{d}y = 0$.

Řešení: Upravíme na $(1+x^2)\,\mathrm{d}y = -(1+y^2)\,\mathrm{d}x$ a pokračujeme 3. krokem:

$\dfrac{1}{(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x;\qquad \displaystyle\int \frac{1}{(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{1}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x;$

$\operatorname{arctg} y = -\operatorname{arctg} x + C.$ Obecné řešení bude $\underline{\underline{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C}}.$

Příklad 1.2.3. *Řešte separovatelnou diferenciální rovnici* $y' \operatorname{tg} x = y$.

Řešení: 1.) $\operatorname{tg} x \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$; 2.) $\operatorname{tg} x \ \mathrm{d}y = y \ \mathrm{d}x$; 3.) $\dfrac{1}{y} \ \mathrm{d}y = \dfrac{\cos x}{\sin x} \ \mathrm{d}x$;

4.) $\displaystyle\int \frac{1}{y} \ \mathrm{d}y = \int \frac{\cos x}{\sin x} \ \mathrm{d}x$; $\displaystyle\int \frac{1}{y} \ \mathrm{d}y = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \ \mathrm{d}x$.

Po integrování dostaneme

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + c.$$

Získané řešení upravíme: $|y| = e^{\ln|\sin x|+c} = e^{\ln|\sin x|} \cdot e^c = e^c \ |\sin x|$.

Označíme $C = \pm e^c$. Obecně takové $C \neq 0$. Někdy můžeme připustit i $C = 0$, jako v tomto příkladě. Můžeme tedy napsat obecné řešení naši rovnice ve tvaru

$$\underline{\underline{y = C \ \sin x}}.$$

Příklad 1.2.4. *Najděte partikulární řešení separovatelné diferenciální rovnice*

$$(1 + e^x) \ y \ y' = e^x, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

Řešení: 1.) $(1 + e^x) \ y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x$; 2.) $(1 + e^x) \ y \ \mathrm{d}y = e^x \ \mathrm{d}x$;

3.) $y \ \mathrm{d}y = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)} \ \mathrm{d}x$; 4.) $\displaystyle\int y \ \mathrm{d}y = \int \frac{e^x}{(1 + e^x)} \ \mathrm{d}x$.

Dostali jsme obecné řešení ve tvaru $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$.

Hledáme partikulární řešení: $\frac{\sqrt{2}^2}{2} = \ln(1 + e^0) + C$. Potom $C = 1 - \ln 2$.

Partikulární řešení je $\dfrac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + 1 - \ln 2$.

Po úpravě $\underline{\underline{y = \sqrt{2\ln(1 + e^x) + 2 - \ln 4}}}$.

Příklad 1.2.5. *Řešte separovatelné diferenciální rovnice*

a) $x \ y \ y' = 1 - x^2$ *b)* $y' = y \operatorname{tg} x$ *c)* $y' + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

d) $y' = (y - 1)(y - 2)$ *e)* $y' = e^{x+y}$ *f)* $(xy^2 + x) \ \mathrm{d}x + (y - x^2 y) \ \mathrm{d}y = 0$

Řešení: a) $\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c$, po úpravě $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$, $C > 0$;
b) $y = \frac{C}{\cos x}$; c) $C = \arcsin x +$ arcsin y, $y = 1$, $y = -1$;
d) integrál dle $\mathrm{d}y$ počítejte rozkladem na parciální zlomky.
Řešení je $\ln|\frac{y-2}{y-1}| = x + c$. Po úpravě $y - 2 = Ce^x(y - 1)$. Další řešení je $y = 1$;
e)Využijte vztah $e^{x+y} = e^x e^y$ a $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$. Řešení bude $e^x + e^{-y} = C$;
f) $\frac{1}{2}\ln(y^2 + 1) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + c$. Po úpravě $y^2 + 1 = C(x^2 - 1)$.

1.3 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu — rovnice, která se dá upravit na tvar

$$y' + f(x) \cdot y = g(x). \qquad \text{(LR)}$$

Homogenní lineární dif. rovnice prvního řádu — rovnice tvaru $y' + f(x) \cdot y = 0$.

Metoda variace konstanty — metoda na řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu, při které se nejdřív metodou separace proměnných najde řešení homogenní rovnice

$$y' + f(x) \cdot y = 0.$$

Toto řešení se upraví na tvar $y = C \cdot F(x)$. Potom se předpokládá, že $C = C(x)$, tj. konstanta závisí na x, a řešení lineární rovnice hledáme ve tvaru

$$y = C(x) \cdot F(x).$$

Předpokládaný tvar řešení se dosadí do diferenciální rovnice (LR). Vznikne rovnice typu $C'(x) = \phi(x)$. Z toho se vypočítá konkrétní funkce $C(x)$.

Příklad 1.3.1. *Řešte lineární diferenciální rovnici* $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

Řešení: Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici $y' + 2xy = 0$:

$$y' = -2xy; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy; \quad \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x; \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int -2x\,\mathrm{d}x; \quad \ln|y| = -x^2 + c.$$

Potřebujeme vyjádřit y, a proto musíme dál upravovat:

$$|y| = e^{-x^2+c}; \quad |y| = e^{-x^2} \cdot e^c; \quad y = C \cdot e^{-x^2}, \quad \text{kde } C = \pm e^c.$$

Našli jsme obecné řešení lineární homogenní rovnice $y' + 2xy = 0$. Obecné řešení lineární nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{-x^2}$. Abychom mohli určit $C(x)$, musíme dosadit do diferenciální rovnice, a k tomu musíme nejdřív y derivovat.

$$y = C(x) \cdot e^{-x^2}; \qquad y' = C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Po dosazení dostaneme podmínku pro $C'(x)$:

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2}(-2x) + 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}.$$

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}; \quad C'(x) = 1.$$

Z toho integrováním dostaneme, že $C(x) = \int 1\,\mathrm{d}x = x + K$.

Zbývá už jenom dosadit za $C(x)$. Hledané obecné řešení bude

$$y = C(x) \cdot e^{-x^2} = (x + K) \cdot e^{-x^2} \underline{\underline{= K \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}}}.$$

Příklad 1.3.2. *Řešte lineární diferenciální rovnici* $y' - \dfrac{xy}{1+x^2} = x, \quad y(0) = 2.$

Řešení: $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}; \qquad \displaystyle\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = \ln\sqrt{1+x^2} + c$, potom $y = C\cdot\sqrt{1+x^2}$.

Variace konstanty: $y = C(x)\cdot\sqrt{1+x^2}; \quad y' = C'(x)\cdot\sqrt{1+x^2} + C(x)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

Po dosazení: $C'(x)\sqrt{1+x^2} = x;\ C'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}};\ C(x) = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Substituce $1 + x^2 = t^2$ vede na $C(x) = \sqrt{1+x^2} + K$.

Obecné řešení dané rovnice je $y = K\cdot\sqrt{1+x^2} + x^2 + 1$.

Dosadíme počáteční podmínku: $2 = y(0) = K\cdot\sqrt{1} + 1 = K + 1$.

Z toho $K = 1$ a hledané partikulární řešení bude $\underline{\underline{y = \sqrt{1+x^2} + x^2 + 1}}$.

Příklad 1.3.3. *Najděte obecné řešení rovnice* $xy' + y - e^x = 0$.

Řešení: Rovnice není ve tvaru lineární diferenciální rovnice. Nejdřív ji musíme upravit. Převedeme e^x na pravou stranu a pak celou rovnici vydělíme x. Dostaneme

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}.$$

Tato rovnice už je ve tvaru (LR) a vyřešíme ji metodou variace konstanty.

$y' + \dfrac{y}{x} = 0;\ y' = -\dfrac{y}{x};\ \displaystyle\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x;\ \ln|y| = -\ln|x| + c;\ y = \frac{C}{x}.$

Variace konstanty: $y = \dfrac{C(x)}{x}; \quad y' = \dfrac{C'(x)\cdot x - C(x)}{x^2}.$

Po dosazení: $\dfrac{C'(x)}{x} = \dfrac{e^x}{x}; \quad C'(x) = e^x; \quad C(x) = e^x + K.$ Pak $\underline{\underline{y = \dfrac{e^x + K}{x}}}$.

Příklad 1.3.4. *Je dán elektrický RL obvod s cívkou o samoindukčnosti L, ohmickým odporem R a napětím E. Dle Kirchhoffova zákona závislost proudu I na čase t vyjadřuje diferenciální rovnice*

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR = E.$$

Najděte vzorec pro řešení $I(t)$, jestliže víte, že na počátku byl proud nulový.

Řešení: Rovnici upravíme na tvar $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}\,I = \dfrac{E}{L}$ a řešíme jako (LR):

$\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}\,I = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{IR}{L}, \quad \dfrac{1}{I}\,\mathrm{d}I = -\dfrac{R}{L}\,\mathrm{d}t, \quad \displaystyle\int \frac{1}{I}\,\mathrm{d}I = -\int \frac{R}{L}\,\mathrm{d}t.$

Řešení homogenní rovnice bude $\ln|I| = -\dfrac{R}{L}t + c \quad \Rightarrow \quad I = C\,e^{-\frac{R}{L}t}.$

Variace konstanty: $I = C(t)\, e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad I' = C'(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} - C(t)\dfrac{R}{L}\, e^{-\frac{R}{L}t}.$

Po dosazení $C'(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} = \dfrac{E}{L}, \qquad C'(t) = \dfrac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}, \qquad C(t) = \dfrac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + K.$

Obecné řešení je tedy $I = \left(\dfrac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + K\right) e^{-\frac{R}{L}t} = K\, e^{-\frac{R}{L}t} + \dfrac{E}{R}.$

Z počáteční podmínky $I(0) = 0$ dostaneme, že $K = -\frac{E}{R}$.

Hledaný vzorec pro proud v elektrickém RL obvodu je $\underline{\underline{I = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}}.$

Příklad 1.3.5. *Řešte lineární diferenciální rovnice*

a) $y' + \dfrac{y}{x} = 6x$ *b)* $y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$ *c)* $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

d) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$ *e)* $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ *f)* $y' + y\cos x = \sin x \cos x$

Řešení: a) $y = \frac{C}{x} + 2x^2$; b) $y = C\cos x + \sin x$; c) $y = e^{-x^2}(\frac{x^2}{2} + C)$;
d) dostanete $\int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{x(x+1)}\, \mathrm{d}x$. Použijte rozklad na parciální zlomky.
Výsledek: $y = \frac{x}{x+1}(C + x + \ln|x|)$; e) $y = (1+x^2)(C+x)$;
f) dostanete $C(x) = \int e^{\sin x} \sin x \cos x\, \mathrm{d}x$. Použijte nejdřív substituci a potom per partes. Výsledek: $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

Příklad 1.3.6. *Najděte řešení $y(x)$ počáteční úlohy*

a) $y' \cos x - y \sin x = 2x,\ y(0) = 0$ *b)* $y' = 6y - 4e^{6x}\cos 5x + 24,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -4$

c) $y' - \dfrac{y}{x+1} = x - 1,\ y(0) = 0$ *d)* $y' = \dfrac{y}{x-5} + 5x - 25,\ y(6) = 14$

Řešení: a) $y = \frac{x^2}{\cos x}$; b) $y = \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\sin 5x - 4e^{-6x}\right) e^{6x}$;
c) $y = (x+1)\,(x - 2\ln|x+1|)$; d) $y = (5x-16)(x-5) = 5x^2 - 41x + 80$.

Příklad 1.3.7. *Řešte následující rovnice prvního řádu*

a) $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ *b)* $xy' + y = y^2$

c) $y' x \ln x - y = 3\, x^3 \ln^2 x$ *d)* $y' = x^2 - x^2 y$

Řešení: a) lineární, řešení: $y = \dfrac{\operatorname{tg} x + K}{\cos x}$;
b) separovatelná, řešení: $y = \frac{1}{1-Kx}$ a $y = 0$;
c) lineární, řešení: $y = (x^3 + K)\ln x$;
d) lineární a také separovatelná, řešení: $y = 1 + K\, e^{-\frac{x^3}{3}}$.

STUDIJNÍ JEDNOTKA

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VYŠŠÍHO ŘÁDU

Cíle studijní jednotky. Naučíte se řešit diferenciální rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty. Nejdřív to budou homogenní rovnice, které se budou řešit pomoci charakteristické rovnice. Nehomogenní rovnice budeme řešit pouze v případě, je-li funkce na pravé straně ve speciálním tvaru. Budete využívat diferenciální počet funkce jedné proměnné a vzorec na řešení kvadratické rovnice.

2 Diferenciální rovnice vyššího řádu

2.1 Homogenní diferenciální rovnice vyššího řádu

Homogenní lineární dif. rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty — rovnice, která má tvar

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Fundamentální systém řešení homogenní dif. rovnice n-tého řádu — n lineárně nezávislých partikulárních řešení příslušné rovnice

Charakteristická rovnice — rovnice, která vznikne při hledání partikulárních řešení homogenní rovnice ve tvaru $e^{\lambda x}$

K nalezení obecného řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty je třeba vyřešit příslušnou charakteristickou rovnici

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Jde o algebraickou rovnici, která má n kořenů. Ke každému nalezenému kořenu se přiřadí jedno partikulární řešení a tak se dostane celý fundamentální systém. Na příkladu rovnice druhého řádu ukážeme jak toto přiřazení provést.

Charakteristická rovnice homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$. Tuto rovnici vyřešíme (pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici). Mohou nastat tři případy (v závislosti na diskriminantu):

1. Diskriminant je kladný, rovnice má dva navzájem různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Potom fundamentální systém rovnice je
$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$
2. Diskriminant je nulový, rovnice má dvojnásobný reálný kořen $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Potom fundamentální systém rovnice je
$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = xe^{\lambda x}.$$
3. Diskriminant je záporný, rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$, kde i označuje komplexní jednotku. Hledá se reálné řešení, a proto se zvolí (vzhledem k platnosti Eulerovy identity $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$) fundamentální systém:
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Obecné řešení pak bude (ve všech třech případech): $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$.

V případě rovnic třetího a vyššího řádu k řešením charakteristické rovnice přiřazujeme fundamentální systém stejným způsobem jako v případě rovnice druhého řádu.

Příklad 2.1.1. *Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu*

a) $y'' - y' - 2y = 0$ *b)* $4y'' - 4y' + y = 0$

c) $y'' + 4y = 0$ *d)* $y'' - 4y' + 13y = 0$

Řešení: a) Napíšeme charakteristickou rovnici $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Tu vyřešíme
$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2, \\ -1. \end{array}\right.$$

Potom $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$, a ze vztahu $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ dostaneme obecné řešení
$$\underline{\underline{y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-x}}}.$$

b) Charakteristická rovnice je $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$; $\quad \lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen, a proto $y_1 = e^{\frac{1}{2}x}$, $y_2 = xe^{\frac{1}{2}x}$. Obecné řešení této rovnice je
$$\underline{\underline{y = C_1\, e^{\frac{1}{2}x} + C_2\, x\, e^{\frac{1}{2}x}}}.$$

c) Charakteristická rovnice je $\lambda^2+4=0$ a má komplexní kořeny $\lambda_{1,2}=\pm 2i$.
Potom $y_1=\cos 2x,\ y_2=\sin 2x$. Obecné řešení bude

$$\underline{\underline{y=C_1\ \cos 2x+C_2\ \sin 2x.}}$$

d) Charakteristická rovnice je $\lambda^2-4\lambda+13=0$.
Dostaneme zase komplexní kořeny $\lambda_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=2\pm 3i$.
Z toho $y_1=e^{2x}\cos 3x$, $y_2=e^{2x}\sin 3x$ a obecné řešení je

$$\underline{\underline{y=C_1\ e^{2x}\cos 3x+C_2\ e^{2x}\sin 3x.}}$$

Příklad 2.1.2. *Najděte řešení Cauchyho úlohy*

a) $y''-4y'=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=8$ *b)* $y''-2y'+2y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=2$

Řešení: a) Charakteristická rovnice $\lambda^2-4\lambda=0$ má reálné kořeny
$\lambda_1=0$ a $\lambda_2=4$. Potom $y_1=e^{0x}=1,\ y_2=e^{4x}$ a $y=C_1+C_2\,e^{4x}$.
Spočítáme $y'=4\,C_2\,e^{4x}$ a dosadíme počáteční podmínky
$3=y(0)=C_1+C_2,\ 8=y'(0)=4\,C_2$. Řešením této soustavy rovnic je
$C_1=1,\ C_2=2$. Z toho partikulární řešení bude $\underline{\underline{y=1+2\,e^{4x}}}$.

b) Charakteristická rovnice $\lambda^2-2\lambda+2=0$ má komplexní kořeny $\lambda_{1,2}=1\pm i$.
Potom $y_1=e^x\cos x$, $y_2=e^x\sin x$ a $y=C_1\,e^x\cos x+C_2\,e^x\sin x$.
Z toho $y'=C_1\,e^x\cos x-C_1\,e^x\sin x+C_2\,e^x\sin x+C_2\,e^x\cos x$.
Po dosazení podmínek dostaneme soustavu $C_1=0,\ C_1+C_2=2$.
Pak $C_1=0,\ C_2=2$ a hledané řešení bude $\underline{\underline{y=2\,e^x\sin x}}$.

Příklad 2.1.3. *Najděte obecné řešení rovnic druhého řádu*

a) $y''-5y'+6y=0$ *b)* $y''-4y'+4y=0$ *c)* $y''-y=0$

d) $y''-4y'+5y=0$ *e)* $y''+2y'+10y=0$ *f)* $y''+2y=0$

Řešení: a) $y=C_1\,e^{2x}+C_2\,e^{3x}$; b) $y=C_1\,e^{2x}+C_2\,xe^{2x}$;
c) $y=C_1\,e^x+C_2\,e^{-x}$; d) $y=C_1\,e^{2x}\cos x+C_2\,e^{2x}\sin x$;
e) $y=C_1\,e^{-x}\cos 3x+C_2\,e^{-x}\sin 3x$; f) $y=C_1\ \cos\sqrt{2}x+C_2\ \sin\sqrt{2}x$.

Příklad 2.1.4. *Najděte řešení Cauchyho úlohy*

a) $y''-4y'+3y=0,\ y(0)=6,\ y'(0)=10$ *b)* $4y''+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$

c) $y''-6y'+13y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=6$

Řešení: a) $y=4\,e^x+2\,e^{3x}$; b) $y=\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}$; c) $y=2e^{3x}\cos 2x$.

2.2 Nehomogenní diferenciální rovnice vyššího řádu

Obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

je součtem obecného řešení homogenní rovnice (budeme ho značit y_h) a jednoho partikulárního řešení nehomogenní rovnice (budeme ho značit Y),

$$y = y_h + Y.$$

Metoda, pomocí které se dá určit jedno partikulární řešení Y v případě speciální pravé strany, se nazývá **metoda neurčitých koeficientů.** Tvar partikulárního řešení se odhadne z tvaru pravé strany diferenciální rovnice:

Pravá strana $f(x)$	Partikulární řešení Y
$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ kde $P_n(x)$ je polynom n-tého stupně	$Y = e^{\alpha x} x^k Q_n(x)$ α je k-násobný kořen char. rovnice $Q_n(x)$ je obecný polynom n-tého stupně
$f(x) = e^{\alpha x}(M \cos \beta x + N \sin \beta x)$	$Y = e^{\alpha x} x^k (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ $\alpha + i\beta$ je k-násobný kořen char. rovnice A, B jsou reálná čísla

Poznámka. V případě, že α (resp. $\alpha + i\beta$) není kořen charakteristické rovnice, $k = 0$.

Princip superpozice. Jestliže funkce na pravé straně je součtem speciálních pravých stran

$$f(x) = f_1(x) + \ldots + f_m(x),$$

potom i partikulární řešení nehomogenní rovnice bude součtem partikulárních řešení pro jednotlivé speciální pravé strany,

$$Y = Y_1 + \ldots + Y_m.$$

Příklad 2.2.1. *Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou*

a) $y'' - 4y = 10\, e^{3x}$ *b)* $y'' + 4y = 8x^2 - 32x + 4$

c) $y'' + 2y' - 3y = (4x - 3)\, e^{x}$ *d)* $3y'' - 2y' = 10 \cos 2x$

Řešení: a) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' - 4y = 0$. Máme $\lambda^2 - 4 = 0$.

Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2$ a $y_h = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-2x}$.
Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10\, e^{3x} = e^{3x}\, P_0(x).$$

Zde $\alpha = 3$ není kořen charakteristické rovnice $(3 \neq \pm 2)$, a proto $k = 0$. Obecný polynom nultého stupně je konstanta, označíme ji A. Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{3x}\, x^0\, A\ = A\, e^{3x}$$

a musí splňovat rovnici $Y'' - 4Y = 10\, e^{3x}$. Musíme Y dvakrát derivovat a dosadit do rovnice: $Y = A\, e^{3x}$, $Y' = 3A\, e^{3x}$, $Y'' = 9A\, e^{3x}$. Po dosazení

$$9A\, e^{3x} - 4A\, e^{3x} = 10\, e^{3x}.$$

Rovnici nejdřív vydělíme e^{3x} a dostaneme $9A - 4A = 10;\quad 5A = 10;\quad A = 2.$
Máme jedno partikulární řešení $Y = 2\, e^{3x}$ a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = y_h + Y = \underline{\underline{C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-2x} + 2\, e^{3x}}}.$$

b) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 4y = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 4 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ a $y_h = C_1\, \cos 2x + C_2\, \sin 2x$.
Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 8x^2 - 32x + 4 = e^{0x}\, (8x^2 - 32x + 4) = e^{0x}\, P_2(x).$$

Zde $\alpha = 0$ není kořen charakteristické rovnice $(0 \neq \pm 2i)$, a proto $k = 0$. Obecný polynom druhého stupně je $Ax^2 + Bx + C$. Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x}\, x^0\, (Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$$

a musí splňovat rovnici $Y'' + 4Y = 8x^2 - 32x + 4$. Musíme Y dvakrát derivovat $Y = Ax^2 + Bx + C$, $Y' = 2Ax + B$, $Y'' = 2A$, a po dosazení

$$2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8x^2 - 32x + 4.$$

Na obou stranách rovnice jsou polynomy druhého stupně. Aby platila rovnost musí se rovnat koeficienty u jednotlivých mocnin (odtud pochází také název metoda neurčitých koeficientů).

x^2 : $\quad 4A = 8$

x^1 : $\quad 4B = -32$

x^0 : $\quad 2A + 4C = 4$

Dostali jsme soustavu rovnic. Po vyřešení máme $A = 2,\ B = -8,\ C = 0.$

Získali jsme jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice $Y = 2\,x^2 - 8\,x.$

Potom obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = \underline{\underline{C_1\ \cos 2x + C_2\ \sin 2x + 2\,x^2 - 8\,x}}.$$

c) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 2y' - 3y = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$ a $y_h = C_1\,e^x + C_2\,e^{-3x}$.

Pravá strana je tvaru

$$f(x) = (4x - 3)e^x = e^x\ P_1(x).$$

Zde $\alpha = 1$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$. Obecný polynom prvního stupně je $Ax + B$, a partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^x\ x^1\ (Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$$

a musí splňovat rovnici $Y'' + 2Y' - 3Y = (4x - 3)\,e^x$.

Musíme Y dvakrát derivovat (jako součin): $Y = e^x(Ax^2 + Bx)$,

$Y' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B)$,

$Y'' = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + e^x(2Ax + B + 2A) =$

$= e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A) = e^x(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A)$,

a po dosazení

$e^x(Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A) + 2e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B) - 3e^x(A\,x^2 + Bx) =$

$= (4x - 3)e^x$.

Rovnici nejdřív vydělíme e^x a dostaneme

$Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A + 2Ax^2 + 2Bx + 4Ax + 2B - 3Ax^2 - 3Bx = 4x - 3.$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin.

$x^2:\quad A + 2A - 3A = 0$

$x^1:\quad B + 4A + 2B + 4A - 3B = 4$

$x^0:\quad 2B + 2A + 2B = -3$

Dostali jsme soustavu $8A = 4,\quad 2A + 4B = -3$. Potom $A = \frac{1}{2},\quad B = -1.$

Partikulární řešení je $Y = e^x\left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)$. Potom obecné řešení bude

$$y = y_h + Y = \underline{\underline{C_1\,e^x + C_2\,e^{-3x} + e^x\left(\frac{x^2}{2} - x\right)}}.$$

d) Vyřešíme homogenní rovnici $3y'' - 2y' = 0$. Charakteristická rovnice je $3\lambda^2 - 2\lambda = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ a $y_h = C_1 + C_2\, e^{\frac{2}{3}x}$.
Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10\ \cos 2x = e^{0x}\ (10 \cos 2x + 0 \sin 2x).$$

Zde $\alpha + i\beta = 0 + 2i$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x}\ x^0\ (A \cos 2x + B \sin 2x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

a musí splňovat rovnici $3Y'' - 2Y' = 10 \cos 2x$. Musíme Y dvakrát derivovat:
$Y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$, $\qquad Y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$. Dosadíme
$3(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) - 2(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) = 10 \cos 2x$,
$-12A \cos 2x - 12B \sin 2x + 4A \sin 2x - 4B \cos 2x = 10 \cos 2x$.
Aby rovnice platila, musí se rovnat koeficienty při $\cos 2x$ a $\sin 2x$ na obou stranách:
$\cos 2x: \quad -12A - 4B = 10$
$\sin 2x: \quad -12B + 4A = 0$
Zase jsme dostali soustavu rovnic: $-12A - 4B = 10$, $\quad A - 3B = 0$.
Odtud $A = -\frac{3}{4}$, $\quad B = -\frac{1}{4}$. Partikulární řešení je $Y = -\dfrac{3}{4} \cos 2x - \dfrac{1}{4} \sin 2x$,
Obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = \underline{\underline{C_1 + C_2\ e^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x.}}$$

Příklad 2.2.2. *Najděte partikulární řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou*

a) $y'' + 2y' + y = 2x - 1, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -4$

b) $y'' + y = 8 \sin x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -3$

Řešení: a) Vyřešíme homogenní rovnici $y''+2y'+1 = 0$. Máme $\lambda^2+2\lambda+1 = 0$.
Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ a $y_h = C_1\ e^{-x} + C_2\ x\ e^{-x}$.
Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 2x - 1 = e^{0x}\ (2x - 1) = e^{0x}\ P_1(x).$$

Zde $\alpha = 0$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Potom

$Y = e^{0x}\, x^0\, (Ax + B) \ = Ax + B, \quad Y' = A, \quad Y'' = 0$ a po dosazení

$$0 + 2A + Ax + B = 2x - 1.$$

Porovnáme koeficienty: $x^1 : \qquad A = 2$

$x^0 : \quad 2\,A + B = -1$

a dostaneme $A = 2$ a $B = -5$. Potom $Y = 2x - 5$ a obecné řešení

$$y = y_h + Y = C_1\, e^{-x} + C_2\, x\, e^{-x} + 2x - 5.$$

Spočítáme ještě y', abychom mohli dosadit počáteční podmínky,

$$y' = -C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{-x} - C_2\, x\, e^{-x} + 2.$$

Z toho $3 = y(0) = C_1 - 5, \quad -4 = y'(0) = -C_1 + C_2 + 2$. Pak $C_1 = 8, \ C_2 = 2$.
Hledané partikulární řešení bude $\underline{\underline{y = 8\, e^{-x} + 2\, x\, e^{-x} + 2x - 5}}$.

b) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + y = 0$. Máme $\lambda^2 + 1 = 0$.
Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm i$ a $y_h = C_1\, \cos x + C_2\, \sin x$.
Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 8 \sin x = e^{0x}\, (0 \cos x + 8 \sin x).$$

Zde $\alpha + i\beta = 0 + i$ je kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$ a

$$Y = e^{0x}\, x^1\, (A \cos x + B \sin x) = x(A \cos x + B \sin x).$$

Spočítáme derivace a dosadíme do rovnice:

$$Y' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x) = (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x,$$

$$Y'' = (2B - Ax) \cos x + (-2A - Bx) \sin x,$$

$$(2B - Ax) \cos x + (-2A - Bx) \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = 8 \sin x.$$

Musí se rovnat koeficienty při $\cos x$ a $\sin x$ na obou stranách:
$\cos x : \quad 2B - Ax + Ax = 0$
$\sin x : \quad -2A - Bx + Bx = 8$
Potom $A = -4, \ B = 0, \ Y = -4x \cos x$ a $y = C_1\, \cos x + C_2\, \sin x - 4x \cos x$.
Spočítáme $y' = -C_1\, \sin x + C_2\, \cos x - 4 \cos x + 4x \sin x$ a dosadíme počáteční podmínky: $1 = y(0) = C_1, \quad -3 = y'(0) = C_2 - 4 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1, \ C_2 = 1$.
Hledané řešení je $\underline{\underline{y = \ \cos x + \ \sin x - 4x \cos x}}$.

Příklad 2.2.3. *Principem superpozice vyřešte lineární diferenciální rovnici druhého řádu* $y'' + y' = 5x + 2e^x$.

Řešení: Kořeny charakteristické rovnice $\lambda^2 + \lambda = 0$ jsou $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1$ a $y_h = C_1 + C_2\, e^{-x}$.

Partikulární řešení dostaneme jako součet partikulárních řešení dvou rovnic, které mají speciální pravé strany: $y'' + y' = 5x$ a $y'' + y' = 2e^x$.

U první rovnice je pravá strana tvaru

$$f_1(x) = 5x = e^{0x}\, 5x = e^{0x}\, P_1(x).$$

Zde $\alpha = 0$ je jednoduchý kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$. Potom

$Y_1 = e^{0x}\, x^1\, (Ax+B) = Ax^2+Bx,\quad Y_1' = 2Ax+B,\quad Y_1'' = 2A$ a po dosazení do rovnice $Y_1'' + Y_1' = 5x$ máme $2A + 2Ax + B = 5x$.

Porovnáme koeficienty: $x^1 : \quad 2A = 5$

$x^0 : \quad 2A + B = 0$

Z toho $A = \frac{5}{2}$ a $B = -5$. Dostali jsme $Y_1 = \frac{5}{2}x^2 - 5x$.

U druhé rovnice je pravá strana tvaru

$$f_2(x) = 2e^x = e^x\, 2 = e^x\, P_0(x).$$

Zde $\alpha = 1$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Potom píšeme $Y_2 = e^x x^0 A = Ae^x,\quad Y_2' = Ae^x,\quad Y_2'' = Ae^x$ a po dosazení do $Y_2''+Y_2' = 2e^x$,

$$Ae^x + Ae^x = 2e^x,\quad 2Ae^x = 2e^x,\quad 2A = 2,\quad A = 1.$$

Potom $Y_2 = e^x$ a jedno partikulární řešení původní rovnice dostaneme jako

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x.$$

Hledané obecné řešení je $\underline{\underline{y = C_1 + C_2\, e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x}}$.

Příklad 2.2.4. *Najděte obecné řešení rovnic druhého řádu metodou neurčitých koeficientů*

a) $2y'' - 5y' - 7y = 18e^{2x}$ *b)* $y'' - 2y' - 3y = 1 - x$ *c)* $y'' + 3y = 9x^2$

d) $y'' + 6y' + 9y = 36xe^{3x}$ *e)* $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$ *f)* $3y'' - 4y' = 25\sin x$

Řešení: a) $y = C_1\, e^{\frac{7}{2}x} + C_2\, e^{-x} - 2e^{2x}$; b) $y = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{3x} + \frac{1}{9}(3x-5)$;

c) $y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2\, \sin\sqrt{3}x + 3x^2 - 2$; d) $y = C_1\, e^{-3x} + C_2\, xe^{-3x} + e^{3x}(x - \frac{1}{3})$;

e) $y = C_1\, e^{-x}\cos 2x + C_2\, e^{-x}\sin 2x - 4\cos 2x + \sin 2x$;

f) $y = C_1 + C_2\, e^{\frac{4}{3}x} + 4\cos x - 3\sin x$.

Příklad 2.2.5. *Najděte partikulární řešení rovnic metodou neurčitých koeficientů*

a) $y'' - 2y' = 2x^2 e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5$

b) $y'' - 2y = (2x-1)^2, \quad y(0) = -\frac{1}{2},\ y'(0) = 2$

c) $y'' - 7y' + 10y = 116 \sin 2x, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -2$

Řešení: a) $y = \frac{1}{2} + \frac{9}{2}e^{2x} + e^x(-2x^2 - 4)$; b) $y = e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x} - 2x^2 + 2x - \frac{5}{2}$;
c) $y = -4e^{2x} + 7\cos 2x + 3\sin 2x$.

STUDIJNÍ JEDNOTKA

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Cíle studijní jednotky. V první části si můžete osvěžit své znalosti o komplexních číslech, které máte ze střední školy. Ke zvládnutí dalších kapitol je nutné, abyste uměli pracovat s komplexními čísly a zobrazovat je v komplexní rovině. Dále se seznámíte s pojmem komplexní funkce a holomorfní funkce, naučíte se tyto funkce derivovat. Předpokládám, že už umíte derivovat funkci jedné reálné proměnné a počítat parciální derivace funkce více proměnných.

3 Funkce komplexní proměnné

3.1 Komplexní čísla

Komplexní jednotka — číslo j, pro které platí $\mathrm{j}^2 = -1$, někdy se označuje také jako i.

Algebraický tvar komplexního čísla — komplexní číslo zapsané ve tvaru

$$z = a + \mathrm{j}\, b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a = \mathcal{Re}\, z,\ b = \mathcal{Im}\, z.$$

Číslo a nazýváme **reálnou částí** z, číslo b nazýváme **imaginární částí** z.

Číslo komplexně sdružené — k číslu $z = a + \mathrm{j}\, b$ je to číslo $\overline{z} = a - \mathrm{j}\, b$.

Absolutní hodnota komplexního čísla — pro $z = a + \mathrm{j}\, b$ je to reálné číslo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Argument komplexního čísla — $\mathcal{Arg}\, z = \varphi$ je úhel mezi kladnou x-ovou poloosou a polopřímkou, spojující bod z s počátkem. Uvažujeme-li pouze $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, píšeme $\mathcal{arg}\, z = \varphi$. Pro argument φ komplexního čísla $z = a + \mathrm{j}\, b$ platí

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Gaussova rovina — rovina xy, ve které komplexní číslo $z = a + \mathrm{j}\, b$ je znázorněno bodem $[a, b]$. Absolutní hodnota čísla z se potom rovná vzdálenosti bodu $[a, b]$ od počátku. Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel se rovná jejich vzdálenosti v komplexní rovině.

Goniometrický tvar komplexního čísla — komplexní číslo zapsané ve tvaru

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{j}\,\sin\varphi),$$

kde $|z|$ je absolutní hodnota komplexního čísla a φ je argument čísla z.

Eulerův tvar komplexního čísla — komplexní číslo zapsané ve tvaru

$$z = |z|\; e^{\mathrm{j}\,\varphi},$$

kde $|z|$ a φ mají stejný význam jako u goniometrického tvaru.

Pro $a + \mathrm{j}\, b$ a $c + \mathrm{j}\, d$ libovolná komplexní čísla se definuje **sčítání a násobení** takto:

$$(a + \mathrm{j}\, b) + (c + \mathrm{j}\, d) = (a + c) + \mathrm{j}\,(b + d), \quad (a + \mathrm{j}\, b)\cdot(c + \mathrm{j}\, d) = (ac - bd) + \mathrm{j}\,(ad + bc).$$

Při **dělení komplexních čísel** se využívá komplexně sdružené číslo jmenovatele:

$$\frac{a + \mathrm{j}\, b}{c + \mathrm{j}\, d} = \frac{a + \mathrm{j}\, b}{c + \mathrm{j}\, d}\cdot\frac{c - \mathrm{j}\, d}{c - \mathrm{j}\, d} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathrm{j}\;\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}; \quad a + \mathrm{j}\, b, c + \mathrm{j}\, d \in \mathbb{C};\; c + \mathrm{j}\, d \neq 0.$$

Komplexní čísla se zjednodušují podle pravidel ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\mathrm{j}^{\,2} = -1,\; \mathrm{j}^{\,3} = -\mathrm{j}\,,\; \mathrm{j}^{\,4} = 1,\; \mathrm{j}^{\,5} = \mathrm{j}\,, \ldots, \mathrm{j}^{\,4k} = 1,\; \mathrm{j}^{\,4k+1} = \mathrm{j}\,,\; \mathrm{j}^{\,4k+2} = -1,\; \mathrm{j}^{\,4k+3} = -\mathrm{j}\,.$$

Násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$uv = |u|\cdot|v|(\cos(\alpha + \beta) + \mathrm{j}\,\sin(\alpha + \beta)); \quad \frac{u}{v} = \frac{|u|}{|v|}(\cos(\alpha - \beta) + \mathrm{j}\,\sin(\alpha - \beta)),$$

kde $u = |u|(\cos\alpha + \mathrm{j}\,\sin\alpha)$ a $v = |v|(\cos\beta + \mathrm{j}\,\sin\beta)$ jsou dvě nenulová komplexní čísla.

Pro umocňování platí **Moivreova věta**:

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + \mathrm{j}\,\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{j}\,\sin n\varphi),\; n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 3.1.1. *Vypočítejte komplexní číslo*

a) $z = (2 + \mathrm{j}\,)(5 + \mathrm{j}\,)$ *b)* $z = \mathrm{j}\; + \mathrm{j}^{\,3} + \mathrm{j}^{\,15} + \mathrm{j}^{\,29}$ *c)* $z = \dfrac{1 + 2\mathrm{j}}{3 - 4\mathrm{j}}$

Řešení: a) $(2 + \mathrm{j}\,)(5 + \mathrm{j}\,) = 10 + 5\mathrm{j}\; + 2\mathrm{j}\; - 1 = (10 - 1) + \mathrm{j}\,(5 + 2) = \underline{\underline{9 + 7\mathrm{j}}}$;

b) $\mathrm{j}\; + \mathrm{j}^{\,3} + \mathrm{j}^{\,15} + \mathrm{j}^{\,29} = \mathrm{j}\; + \mathrm{j}^{\,3} + \mathrm{j}^{\,3} + \mathrm{j}\; = \mathrm{j}\; - \mathrm{j}\; - \mathrm{j}\; + \mathrm{j}\; = \underline{\underline{0}}$;

c) $\dfrac{1 + 2\mathrm{j}}{3 - 4\mathrm{j}} = \dfrac{(1 + 2\mathrm{j}\,)(3 + 4\mathrm{j}\,)}{3^2 - (4\mathrm{j}\,)^2} = \dfrac{3 + 4\mathrm{j}\; + 6\mathrm{j}\; + 8\mathrm{j}^{\,2}}{9 - (-16)} = \dfrac{-5 + 10\mathrm{j}}{25} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}\mathrm{j}}}\,.$

Příklad 3.1.2. *Určete absolutní hodnotu a argument komplexních čísel*
a) $-1+\mathrm{j}$ *b)* j *c)* -1 *d)* $2+2\mathrm{j}$

Řešení: a) $|-1+\mathrm{j}\,| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}};\;$ $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\;\; \cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Potom $\underline{\underline{\varphi = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi,\;\; k \text{ celé.}}}$

b) $|\mathrm{j}\,| = \sqrt{0+1^2} = \underline{\underline{1}};\;$ $\sin\varphi = 1,\;\; \cos\varphi = 0.$ Z toho $\underline{\underline{\varphi = \dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi.}}$

c) $|-1| = \sqrt{(-1)^2+0} = \underline{\underline{1}};\;$ $\sin\varphi = 0,\;\; \cos\varphi = -1.$ Z toho $\underline{\underline{\varphi = \pi + 2k\pi.}}$

d) $|2+2\mathrm{j}\,| = \sqrt{2^2+2^2} = \underline{\underline{\sqrt{8}}},\;$ $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\;\; \cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Potom $\underline{\underline{\varphi = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi.}}$

Příklad 3.1.3. *Najděte v Gaussově rovině čísla z, pro něž platí dané rovnice*

a) $|z+3-5\mathrm{j}\,| = 3$ *b)* $|z-\mathrm{j}\,| = 1$ *c)* $1 < |z+\mathrm{j}\,| < 2$

d) $|z| = 1-2\mathrm{j}$ *e)* $\mathcal{R}e\, z = \mathcal{I}m\, z$ *f)* $\mathcal{I}m\, z = -\mathrm{j}$

Řešení: a) $|z+3-5\mathrm{j}\,| = |z-(-3+5\mathrm{j}\,)| = 3.$ V Gaussově rovině $|z+3-5\mathrm{j}\,|$ vyjadřuje vzdálenost bodů z a $-3+5\mathrm{j}$ a tato vzdálenost musí být pro každé z rovna třem. Množina všech takových z je tedy kružnice se středem v bodě $-3+5\mathrm{j}$ a poloměrem 3.

b) Kružnice se středem v bodě j a poloměrem 1.

c) Vzdálenost bodu z od $-\mathrm{j}$ musí být v rozmezí od 1 do 2. Množina všech takových z je tedy vnitřek mezikruží se středem v bodě $-\mathrm{j}$. Poloměry hraničních kružnic jsou 1 a 2.

d) Absolutní hodnota komplexního čísla musí být reálné číslo. Daná rovnice nemá řešení.

e) Vzdálenost čísla z od reálné osy musí být stejná jako vzdálenost čísla z od imaginární osy. Množina všech takových z je osa prvního a třetího kvadrantu.

f) Imaginární část komplexního čísla musí být reálné číslo. Daná rovnice nemá řešení.

Příklad 3.1.4. *Zapište v Eulerově tvaru* $z = |z|\, e^{\mathrm{j}\varphi}$ *komplexní čísla*

a) $1-\mathrm{j}\sqrt{3}$ *b)* $-\mathrm{j}$ *c)* -1 *d)* 1

Řešení: a) $2\, e^{(\frac{1}{3}+2k)\pi\mathrm{j}}$; b) $e^{(\frac{3}{2}+2k)\pi\mathrm{j}}$; c) $e^{(1+2k)\pi\mathrm{j}}$; d) $e^{2k\pi\mathrm{j}}$.

3.2 Funkce komplexní proměnné

Funkce $w = f(z)$ definovaná na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ s funkčními hodnotami v oboru komplexních čísel se nazývá **funkce komplexní proměnné**. Je-li ke každému $z \in \Omega$ přiřazeno právě jedno komplexní číslo w, pak říkáme, že funkce je **jednoznačná,** v opačném případě říkáme, že je **mnohoznačná.** Komplexní funkci $w = f(z)$ můžeme napsat i v algebraickém tvaru

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y),$$

kde $z = x + \mathrm{j}\, y$ a $u(x, y)$, $v(x, y)$ jsou reálné funkce dvou proměnných. Funkci $u(x, y)$ nazýváme reálnou částí f, píšeme $\mathcal{R}e\, f$ a $v(x, y)$ nazýváme imaginární částí funkce f, značíme $\mathcal{I}m\, f$.

Přehled některých důležitých komplexních funkcí

Název komplexní funkce	Vzorec pro komplexní funkci	Podmínky platnosti vzorce
Exponenciální funkce	$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{j}\, \sin y)$	$z = x + \mathrm{j}\, y, z \in \mathbb{C}$
Kosinus	$\cos z = \frac{e^{\mathrm{j}\, z} + e^{-\mathrm{j}\, z}}{2}$	$z \in \mathbb{C}$
Sinus	$\sin z = \frac{e^{\mathrm{j}\, z} - e^{-\mathrm{j}\, z}}{2\mathrm{j}}$	$z \in \mathbb{C}$
Tangens	$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$	$z \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, k celé
Kotangens	$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$	$z \neq k\pi$, k celé
Kosinus hyperbolický	$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$	$z \in \mathbb{C}$
Sinus hyperbolický	$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$	$z \in \mathbb{C}$
Logaritmická funkce	$\mathrm{Ln}\, z = \ln \lvert z \rvert + \mathrm{j}\, \mathcal{A}rg\, z$	$z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$
Mocninná funkce	$z^\alpha = e^{\alpha\, \mathrm{Ln}\, z}$	$z, \alpha \in \mathbb{C},\ z \neq 0$

Funkce $e^z, \sinh z$ a $\cosh z$ jsou periodické s periodou $2\pi\mathrm{j}$, funkce $\sin z$ a $\cos z$ s periodou 2π. Funkce $\mathrm{Ln}\, z$ a z^α jsou víceznačné, ke každému číslu je přiřazeno více komplexních čísel. Omezíme-li se na $\mathcal{a}rg\, z \in \langle 0, 2\pi)$ dostaneme tzv. **hlavní větev logaritmu** resp. **hlavní hodnotu mocninné funkce.**

Příklad 3.2.1. *Určete reálnou a imaginární část funkce* $f(z)$

a) $f(z) = (z + \mathrm{j}\,)^2$ *b)* $f(z) = e^{-\mathrm{j}\,z}$

Řešení: a) $f(x{+}\mathrm{j}\,y) = (x + \mathrm{j}\,y + \mathrm{j}\,)^2 = (x + \mathrm{j}\,(y+1))^2 = x^2 + 2\mathrm{j}\,x(y+1) - (y+1)^2 = x^2 - y^2 - 2y - 1 + \mathrm{j}\,2(xy + x)$.

Z toho píšeme, že $\mathcal{R}e\, f(z) = \underline{\underline{x^2 - y^2 - 2y - 1}}$ a $\mathcal{I}m\, f(z) = \underline{\underline{2xy + 2x}}$.

b) $f(x{+}\mathrm{j}\,y) = e^{-\mathrm{j}\,(x+\mathrm{j}\,y)} = e^{(y-\mathrm{j}\,x)} = e^y(\cos(-x){+}\mathrm{j}\,\sin(-x)) = e^y(\cos x - \mathrm{j}\,\sin x)$.

Potom $\mathcal{R}e\, f(z) = \underline{\underline{e^y \cos x}}$ a $\mathcal{I}m\, f(z) = \underline{\underline{-e^y \sin x}}$.

Příklad 3.2.2. *Vypočítejte hodnoty následujících výrazů, v části d) až h) hlávní hodnoty výrazů*

a) $e^{1+\mathrm{j}\,\pi}$ *b)* $e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}$ *c)* $\ln(e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{3}})$ *d)* $\ln(1 + \mathrm{j}\,)$

e) $\ln(-1)$ *f)* $(-1)^{\mathrm{j}}$ *g)* $\mathrm{j}^{\,\mathrm{j}}$ *h)* $\mathrm{j}^{\,\pi}$

Řešení: a) $e^{1+\mathrm{j}\,\pi} = e(\cos\pi + \mathrm{j}\,\sin\pi) = \underline{\underline{-e}}$.

b) $e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}} = (\cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{j}\,\sin\dfrac{\pi}{2}) = \underline{\underline{\mathrm{j}}}$.

c) $\ln(e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{3}}) = \ln 1 + \mathrm{j}\,\dfrac{\pi}{3} = \underline{\underline{\mathrm{j}\,\dfrac{\pi}{3}}}$.

d) $1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}(\cos(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi) + \mathrm{j}\,\sin(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi))$. Pak $\ln(1 + \mathrm{j}\,) = \underline{\underline{\ln(\sqrt{2}) + \mathrm{j}\,\dfrac{\pi}{4}}}$.

e) $-1 = 1(\cos(\pi + 2k\pi) + \mathrm{j}\,\sin(\pi + 2k\pi))$. Omezíme-li se na hlavní větev logaritmu, bereme $k = 0$ a dostaneme, že $\ln(-1) = \ln 1 + \mathrm{j}\,\pi = \underline{\underline{\mathrm{j}\,\pi}}$.

f) $(-1)^{\mathrm{j}} = e^{\mathrm{j}\,\ln(-1)} = e^{\mathrm{j}\,\ln(\cos\pi + \mathrm{j}\,\sin\pi)} = e^{\mathrm{j}\,\mathrm{j}\,\pi} = \underline{\underline{e^{-\pi}}}$.

g) $\mathrm{j}^{\,\mathrm{j}} = e^{\mathrm{j}\,\ln\mathrm{j}} = e^{\mathrm{j}\,(\ln 1 + \mathrm{j}\,\frac{\pi}{2})} = \underline{\underline{e^{-\frac{\pi}{2}}}}$.

h) $\mathrm{j}^{\,\pi} = e^{\pi\,\ln\mathrm{j}} = e^{\pi\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}} = e^{\mathrm{j}\,\frac{\pi^2}{2}} = \underline{\underline{\cos\dfrac{\pi^2}{2} + \mathrm{j}\,\sin\dfrac{\pi^2}{2}}}$.

Příklad 3.2.3. *Vyjádřete* $\cos^2\varphi$ *a* $\sin^2\varphi$ *pomocí komplexních goniometrických funkcí argumentu* 2φ.

Řešení: Nejdřív spočítáme $\cos^2\varphi$:

$$\cos^2\varphi = \frac{\left(e^{\mathrm{j}\,\varphi} + e^{-\mathrm{j}\,\varphi}\right)^2}{4} = \frac{e^{2\mathrm{j}\,\varphi} + 2 + e^{-2\mathrm{j}\,\varphi}}{4} = \frac{1 + \frac{e^{2\mathrm{j}\,\varphi} + e^{-2\mathrm{j}\,\varphi}}{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}}.$$

Podobně $\sin^2\varphi = \underline{\underline{\dfrac{1 - \cos 2\varphi}{2}}}$.

3.3 Derivace funkce komplexní proměnné, Cauchy-Riemannovy podmínky

Analogicky jako u funkcí reálné proměnné se definuje limita komplexní funkce $w = f(z)$ v bodě z_0 a derivace $f'(z_0)$, jako

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Pro komplexní funkci platí stejná pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu jako pro reálné funkce. Stejně tak platí i pravidlo pro derivování složené funkce.

Jestliže $f'(z_0)$ existuje, říkáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě z_0.

Jestliže f' existuje v bodě z_0 a v nějakém jeho okolí, nazývá se funkce f **analytická** nebo také **holomorfní** v z_0.

Funkce $f(x + \mathrm{j}\, y) = u(x, y) + \mathrm{j}\, v(x, y)$ je holomorfní v bodě z_0, právě když v nějakém okolí tohoto bodu splňuje tzv. **Cauchy-Riemannovy podmínky:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Příklad 3.3.1. *Zjistěte z Cauchy-Riemannových podmínek, na které oblasti jsou následující funkce holomorfní, a na této oblasti spočítejte jejích derivace*

a) $f(z) = e^z$ *b)* $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *c)* $f(z) = \mathcal{I}m\, z$ *d)* $f(z) = |z|$ *e)* $f(z) = z^2$

Řešení: a) Nejdřív musíme určit reálnou a imaginární část funkce.

$f(x + \mathrm{j}\, y) = e^{x + \mathrm{j}\, y} = e^x e^{\mathrm{j}\, y} = e^x(\cos y + \mathrm{j}\, \sin y) = e^x \cos y + \mathrm{j}\, e^x \sin y$. Potom

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{a} \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Rovnice $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^x(-\sin y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ platí na celém $\mathbb{C}$.

Funkce $f(z) = e^z$ je $\underline{\underline{\text{holomorfní pro všechna } z \in \mathbb{C}}}$ a $\underline{\underline{f'(z) = e^z}}$.

b) $f(x + \mathrm{j}\, y) = \dfrac{1}{x + \mathrm{j}\, y} = \dfrac{x - \mathrm{j}\, y}{x^2 + y^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{j}\, \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

Potom

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{a} \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - x2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - y2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Cauchy-Riemannovy podmínky platí pro všechna $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z}$ je $\underline{\underline{\text{holomorfní v každém bodě kromě nuly}}}$ a $\underline{\underline{f'(z) = -\dfrac{1}{z^2} \text{ pro } z \neq 0.}}$

c) Pro $f(z) = \mathcal{Im}\, z$ máme $f(x + \mathrm{j}\, y) = y$. Potom $u(x, y) = y$ a $v(x, y) = 0$ a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, $1 \neq 0$. Rovnice neplatí v žádném bodě. Funkce $\underline{\underline{\text{není holomorfní}}}$ v žádném bodě, a proto $\underline{\underline{f'(z) \text{ neexistuje.}}}$

d) Pro $f(z) = |z|$ máme $f(x + \mathrm{j}\, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Potom $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $v(x, y) = 0$ a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ pouze pro $x = 0$. Podobně $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ pro $y = 0$. Ale v bodě $z = 0 + 0\mathrm{j}$ příslušné derivace nejsou definované. Rovnice neplatí v žádném bodě.
Funkce $\underline{\underline{\text{není holomorfní}}}$ v žádném bodě a proto $\underline{\underline{f'(z) \text{ neexistuje.}}}$

e) $f(x + \mathrm{j}\, y) = (x + \mathrm{j}\, y)^2 = x^2 + 2xy\mathrm{j} - y^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{j}\, 2xy$.
Potom $u(x, y) = x^2 - y^2$ a $v(x, y) = 2xy$.
Rovnice $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ platí na celém $\mathbb{C}$.
Funkce $f(z) = z^2$ je $\underline{\underline{\text{holomorfní pro všechna } z \in \mathbb{C}}}$ a $\underline{\underline{f'(z) = 2z}}$.

Příklad 3.3.2. *Zjistěte oblast na které je funkce* $f(z) = \dfrac{\mathrm{j}}{z - \mathrm{j}}$ *holomorfní, a vypočítejte* $f'(2 - \mathrm{j}\,)$, *jestliže derivace v tomto bodě existuje.*

Řešení: $f(x + \mathrm{j}\, y) = \dfrac{\mathrm{j}}{x + \mathrm{j}\, y - \mathrm{j}} = \dfrac{\mathrm{j}}{x + \mathrm{j}\,(y - 1)} \cdot \dfrac{x - \mathrm{j}\,(y - 1)}{x - \mathrm{j}\,(y - 1)} = \dfrac{(y - 1) + \mathrm{j}\, x}{x^2 + (y - 1)^2}$.

Potom $u(x, y) = \dfrac{(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2}$ a $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + (y - 1)^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-(y-1)2x}{(x^2 + (y-1)^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x2(y-1)}{(x^2 + (y-1)^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2 - (y-1)^2}{(x^2 + (y-1)^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(y-1)^2 - x^2}{(x^2 + (y-1)^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Cauchy-Riemannovy podmínky platí všude kromě bodu $x = 0$, $y = 1$.
Funkce je $\underline{\underline{\text{holomorfní pro všechna } z \in \mathbb{C} - \{\mathrm{j}\,\}}}$.

$$f'(z) = \frac{-\mathrm{j}}{(z - \mathrm{j}\,)^2}, \quad f'(2 - \mathrm{j}\,) = \frac{-\mathrm{j}}{(2 - \mathrm{j} - \mathrm{j}\,)^2} = \frac{-\mathrm{j}}{-8\mathrm{j}} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}.$$

Příklad 3.3.3. *Zjistěte z Cauchy-Riemannových podmínek, na které oblasti jsou následující funkce holomorfní, a na této oblasti spočítejte jejich derivace*

a) $f(z) = z^3$ *b)* $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ *c)* $f(z) = \mathcal{R}e\, z$ *d)* $f(z) = z + \overline{z}$ *e)* $f(z) = \cos z$

Řešení: a) $f'(z) = 3z^2$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$; b) $f'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$ pro všechna $z \in \mathbb{C} - \{1\}$; c) není holomorfní v žádném bodě; d) není holomorfní v žádném bodě; e) $f'(z) = -\sin z$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Příklad 3.3.4. *Najděte holomorfní funkci* $f(z)$*, která má při* $z = x + \mathrm{j}\, y$ *reálnou část* $u = x^2 - y^2 + x$.

Řešení: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \dfrac{\partial v}{\partial y}$. Z toho integrováním dostaneme, že

$v = \int (2x+1)\,\mathrm{d}y = 2xy + y + C(x)$ a z toho $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x)$.

Na druhé straně $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$. Dostali jsme rovnost $2y + C'(x) = 2y$.

Z toho $C'(x) = 0$, a pak $C(x) = \int 0\,\mathrm{d}x = K$.

Po dosazení $v = 2xy + y + K$ a máme řešení

$$f(x + \mathrm{j}\, y) = x^2 - y^2 + x + \mathrm{j}\,(2xy + y + K)\,.$$

Když chceme vyjádřit tuto funkci v závislosti na z, nahradíme $x = z$ a $y = 0$.

Potom $f(z) = z^2 - 0^2 + z + \mathrm{j}\,(2z \cdot 0 + 0 + K) = \underline{\underline{z^2 + z + \mathrm{j}\, K}}$.

Příklad 3.3.5. *Najděte holomorfní funkci* $f(z)$*, která má při* $z = x + \mathrm{j}\, y$ *imaginární část* $v = x + y - 3$ *a* $f(0) = -3\mathrm{j}$.

Řešení: $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Z toho $u = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C(y)$. Potom $\dfrac{\partial u}{\partial y} = C'(y)$.

Na druhé straně $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -1$. Dostali jsme rovnost $C'(y) = -1$.

Pak $C(y) = -\int 1\,\mathrm{d}y = -y + K$. Po dosazení $u = x - y + K$,

$$f(x + \mathrm{j}\, y) = x - y + K + \mathrm{j}\,(x + y - 3)\,,$$

$$f(z) = z + \mathrm{j}\, z - 3\mathrm{j} + K.$$

Musí platit, že $f(0) = 0 + \mathrm{j}\, 0 - 3\mathrm{j} + K = -3\mathrm{j}$. Potom $K = 0$.

Hledaná funkce je $\underline{\underline{f(z) = z + \mathrm{j}\, z - 3\mathrm{j}}}$.

Příklad 3.3.6. *Najděte holomorfní funkci $f(z)$, která má při $z{=}x{+}\mathrm{j}\,y$ reálnou část*
a) $u = 6xy + 3x^2y - y^3$ *a* $f(0) = 5\mathrm{j}$ *b)* $u = x^2 - 2xy$ *a* $f(0) = 0$

Řešení: a) $f(z) = -\mathrm{j}\,z^3 - 3\mathrm{j}\,z^2 + 5\mathrm{j}\,$;
b) taková funkce neexistuje.

Příklad 3.3.7. *Najděte holomorfní funkci $f(z)$, která má při $z{=}x{+}\mathrm{j}\,y$ imaginární část*
a) $v = 9x^3y - 9xy^3 + 5x$ *a* $f(0) = 6$ *b)* $v = 7xy^3 - 7x^3y - 8x$ *a* $f(0) = 3$

Řešení:
a) $f(z) = \frac{9}{4}x^4 - \frac{27}{2}x^2y^2 + \frac{9}{4}y^4 - 5y + 6 + \mathrm{j}\,(9x^3y - 9xy^3 + 5x) = \frac{9}{4}z^4 + 5\mathrm{j}\,z + 6$;
b) $f(z) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{21}{2}x^2y^2 - \frac{7}{4}y^4 + 8y + 3 + \mathrm{j}\,(7xy^3 - 7x^3y - 8x) = -\frac{7}{4}z^4 - 8\mathrm{j}\,z + 3$.

STUDIJNÍ JEDNOTKA

INTEGRÁL FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Cíle studijní jednotky. Naučíte se integrovat komplexní funkci přes křivku v komplexní rovině tak, že komplexní integrál převedete na výpočet určitého integrálu funkce reálné proměnné. Budete k tomu potřebovat integrální počet funkce jedné proměnné a také doporučuji zopakovat si některé části z analytické geometrie, a to popis kružnice, přímky a úsečky. Naučíte se také Cauchyovu větu a Cauchyův vzorec.

4 Integrál funkce komplexní proměnné

4.1 Integrál komplexní funkce pomocí parametrizace křivky

Nechť je daná $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ komplexní funkce reálné proměnné

$$\Gamma : \; z(t) = x(t) + \mathrm{j}\, y(t); \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle.$$

kde funkce $x(t), y(t)$ jsou spojité reálné funkce jedné proměnné takové, že jejich derivace $x'(t), y'(t)$ jsou po částech spojité. Potom říkáme, že Γ je **po částech hladká orientovaná křivka** v komplexní rovině začínající v bodě $z(\alpha)$ a končící v bodě $z(\beta)$.

Z křivek budeme nejčastěji uvažovat úsečky a kružnice, jejichž parametrické rovnice v Gaussové rovině jsou tyto:

1. Obecně úsečka o krajních bodech z_1, z_2 má parametrickou rovnici

   $$z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

   Speciálním případem jsou úsečky ležící na souřadnicových osách. Nejjednodušší popis úsečky ležící na x-ové ose mezi body $z_1 = \alpha, z_2 = \beta$ je $z(t) = t,\; t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a podobně úsečku ležící na y-ové ose mezi body $z_1 = \alpha \mathrm{j}\,, z_2 = \beta \mathrm{j}$ popisujeme jako $z(t) = \mathrm{j}\, t,\; t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

2. Kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_0 o poloměru r má parametrickou rovnici

   $$z(t) = z_0 + r \cdot e^{\mathrm{j}\, t}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Nechť je $w = f(z)$ komplexní funkce, jednoznačná a spojitá na křivce Γ. Potom integrál z funkce f po křivce Γ je definován takto:

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\ \mathrm{d}t.}$$

O integrálu funkce komplexní proměnné platí řada vět analogicky k větám o integrálu reálných funkcí, zejména tyto:

$$\int_\Gamma (f_1(z) + f_2(z))\ \mathrm{d}z = \int_\Gamma f_1(z)\ \mathrm{d}z + \int_\Gamma f_2(z)\ \mathrm{d}z$$

$$\int_\Gamma k \cdot f(z)\ \mathrm{d}z = k \int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z$$

$$\int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z,$$ skládá-li se Γ z křivek Γ_1 a Γ_2, Γ_1 a Γ_2 mají jediný společný bod

$$\int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z = -\int_{\Gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z,$$ značí-li Γ_1 opačně orientovanou křivku Γ

Příklad 4.1.1. *Vypočtěte integrál* $\int_\Gamma \overline{z}\ \mathrm{d}z$, *kde* Γ *je úsečka z bodu -1 do bodu 3.*

Řešení: Parametrická rovnice této úsečky je $z(t) = t,\ t \in \langle -1, 3\rangle$.

Z toho vyjádříme $\overline{z}(t) = t$ a $\mathrm{d}z = 1\ \mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma \overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_{-1}^3 t\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^3 = \frac{9}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \underline{\underline{4}}.$$

Příklad 4.1.2. *Vypočtěte* $\int_\Gamma |z|\ \mathrm{d}z$, *kde* Γ *je horní půlkružnice z bodu 1 do bodu -1.*

Řešení: Parametrická rovnice půlkružnice je $z(t) = e^{\mathrm{j}\,t}, \quad t \in \langle 0, \pi\rangle$.

Z toho vyjádříme $|z(t)| = 1$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,t}\ \mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma |z|\ \mathrm{d}z = \int_0^\pi \mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,t}\ \mathrm{d}t = \mathrm{j}\int_0^\pi e^{\mathrm{j}\,t}\ \mathrm{d}t = \mathrm{j}\left[\frac{e^{\mathrm{j}\,t}}{\mathrm{j}}\right]_0^\pi = \left[e^{\mathrm{j}\,t}\right]_0^\pi = e^{\mathrm{j}\,\pi} - e^0 =$$
$$\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi - 1 = -1 + \mathrm{j}\cdot 0 - 1 = \underline{\underline{-2}}.$$

Příklad 4.1.3. *Vypočtěte* $\int_\Gamma |z|\,\overline{z}\ \mathrm{d}z$, *kde* Γ *je horní půlkružnice z bodu -1 do bodu 1.*

Řešení: Parametrická rovnice půlkružnice je $z(t) = e^{\mathrm{j}\,t}, \quad t = \pi \to t = 0$.

Z toho vyjádříme $|z(t)|\,\overline{z} = e^{-\mathrm{j}\,t}$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,t}\ \mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma |z|\,\overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_\pi^0 e^{-\mathrm{j}\,t}\mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}\,t}\ \mathrm{d}t = \mathrm{j}\int_\pi^0 1\ \mathrm{d}t = \mathrm{j}\ [t]_\pi^0 = \mathrm{j}\,(0 - \pi) = \underline{\underline{-\mathrm{j}\,\pi}}.$$

Příklad 4.1.4. *Vypočtěte* $\int_\Gamma \mathcal{R}e\, z \,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je horní půlkružnice z bodu 3 do bodu -3.*

Řešení: Parametrická rovnice půlkružnice je $z(t) = 3e^{\mathrm{j}\,t}, \quad t \in \langle 0, \pi\rangle$.

Potřebujeme vyjádřit $\mathcal{R}e\, z$ ale z této rovnice půlkružnice to nejde, musíme použit jiný zápis: $z(t) = 3(\cos t + \mathrm{j}\,\sin t), \quad t \in \langle 0, \pi\rangle$.

Potom $\mathcal{R}e\, z = 3\cos t$, a $\mathrm{d}z = (-3\sin t + \mathrm{j}\,3\cos t)\,\mathrm{d}t$, a $\int_\Gamma \mathcal{R}e\, z\,\mathrm{d}z =$

$$= \int_0^\pi 3\cos t(-3\sin t + \mathrm{j}\,3\cos t)\,\mathrm{d}t = 9\int_0^\pi (-\cos t\ \sin t)\,\mathrm{d}t + 9\mathrm{j}\int_0^\pi \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Nejdřív spočítáme první integral pomocí substituce $u = \cos t$.

Pak $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$, a pro $t = 0$ je $u = 1$, pro $t = \pi$ je $u = -1$.

Dostaneme $9\int_0^\pi (-\cos t\ \sin t)\,\mathrm{d}t = 9\int_1^{-1} u\,\mathrm{d}u = 9\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{-1} = 9(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0.$

Pro výpočet druhého integrálu použijeme vzorec : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Potom $\int_0^\pi \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t =$

$= \left[\frac{t}{2}\right]_0^\pi + \left[\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$. Dostali jsme, že $\int_\Gamma \mathcal{R}e\, z\,\mathrm{d}z = 0 + 9\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}\pi\mathrm{j}}}\,.$

Příklad 4.1.5. *Vypočtěte integrál* $\int_\Gamma \mathcal{I}m\, z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je úsečka z bodu 0 do bodu* $1 + \mathrm{j}$.

Řešení: Parametrická rovnice této úsečky je $z(t) = t + \mathrm{j}\,t,\ t \in \langle 0, 1\rangle$.

Z toho $\mathcal{I}m\, z(t) = t$ a $\mathrm{d}z = (1 + \mathrm{j}\,)\,\mathrm{d}t$ a $\int_\Gamma \mathcal{I}m\, z\,\mathrm{d}z =$

$$\int_0^1 t\cdot(1+\mathrm{j}\,)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \mathrm{j}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \mathrm{j}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}}}\,.$$

Příklad 4.1.6. *Vypočtěte* $\int_\Gamma \mathcal{R}e\, z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je oblouk paraboly z bodu* 0 *do bodu* 1, *který má parametrickou rovnici* $z(t) = t + \mathrm{j}\,t^2,\ t \in \langle 0, 1\rangle$.

Řešení: $\Gamma:\ z(t) = t + \mathrm{j}\,t^2,\ t \in \langle 0, 1\rangle, \quad \mathcal{R}e\, z(t) = t$ a $\mathrm{d}z = (1 + \mathrm{j}\,2t)\,\mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma \mathcal{R}e\, z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 t(1 + 2\mathrm{j}\,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{j}\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + 2\mathrm{j}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\mathrm{j}}}\,.$$

Příklad 4.1.7. *Vypočtěte* $\int_\Gamma \mathcal{R}e\, z \, \mathrm{d}z$, *kde* Γ *je lomená čára spojující body 0, 1 a* $1+\mathrm{j}$.

Řešení: Křivka Γ se skládá ze dvou úseček Γ_1 a Γ_2.

$\Gamma_1 :\ z(t) = t,\ t \in \langle 0,1\rangle,\quad \mathcal{R}e\, z(t) = t$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t.$

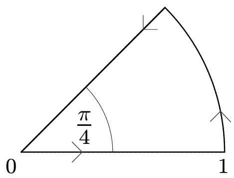
$\Gamma_2 :\ z(t) = 1+\mathrm{j}\,t,\ t \in \langle 0,1\rangle,\quad \mathcal{R}e\, z(t) = 1$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\ \mathrm{d}t.$

$$\int_\Gamma \mathcal{R}e\, z\, \mathrm{d}z = \int_0^1 t\ \mathrm{d}t + \mathrm{j}\int_0^1 1\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \mathrm{j}\ [t]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}+\mathrm{j}}}\,.$$

Příklad 4.1.8. *Vypočtěte* $\int_\Gamma |z|\ \overline{z}\, \mathrm{d}z$, *kde* Γ *je*

a) kladně orientována kružnice $|z| = 2$

b) daná graficky



Řešení: a) $z(t) = 2e^{\mathrm{j}\,t},\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ |z(t)|\ \overline{z}(t) = 2\cdot 2e^{-\mathrm{j}\,t}$ a $\mathrm{d}z = 2\mathrm{j}\, e^{\mathrm{j}\,t}\ \mathrm{d}t.$

$$\int_\Gamma |z|\ \overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} 4e^{-\mathrm{j}\,t} 2\mathrm{j}\, e^{\mathrm{j}\,t}\ \mathrm{d}t = 8\mathrm{j}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 8\mathrm{j}\ [t]_0^{2\pi} = 8\mathrm{j}\, 2\pi = \underline{\underline{16\pi\mathrm{j}}}.$$

b) Křivka se skládá ze tři části: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

$\Gamma_1 :\ z(t) = t,\quad t \in \langle 0,1\rangle,\ |z(t)|\ \overline{z}(t) = t\cdot t = t^2$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t.$

$$\int_{\Gamma_1} |z|\ \overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_0^1 t^2\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$\Gamma_2 :\ z(t) = e^{\mathrm{j}\,t},\quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle,\ |z(t)|\ \overline{z}(t) = e^{-\mathrm{j}\,t}$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\, e^{\mathrm{j}\,t}\ \mathrm{d}t.$

$$\int_{\Gamma_2} |z|\ \overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{j}\,t}\mathrm{j}\, e^{\mathrm{j}\,t}\ \mathrm{d}t = \mathrm{j}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t = \mathrm{j}\ [t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\mathrm{j}\,.$$

$\Gamma_3 :\ z(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t + \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{2}}{2}t = \frac{\sqrt{2}}{2}t(1+\mathrm{j}\,),\qquad \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{j}\,)\ \mathrm{d}t$

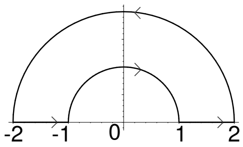
a $|z(t)|\ \overline{z}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}t(1-\mathrm{j}\,) = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2(1-\mathrm{j}\,).$

$$\int_{\Gamma_3} |z|\ \overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_1^0 t^2\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{j}\,)\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{j}\,)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1-\mathrm{j}\,)(1+\mathrm{j}\,)\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^0 = -\frac{1}{3}.$$

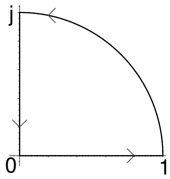
$$\int_\Gamma |z|\ \overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} |z|\ \overline{z}\ \mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} |z|\ \overline{z}\ \mathrm{d}z + \int_{\Gamma_3} |z|\ \overline{z}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}\mathrm{j} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}}\,.$$

Příklad 4.1.9. *Vypočtěte integrály, když integrační cesta je daná graficky*

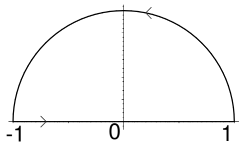
a) $\displaystyle\int_\Gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je:*



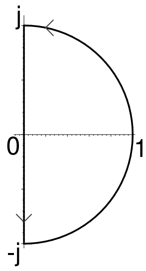
b) $\displaystyle\int_\Gamma |z|\,z\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je:*



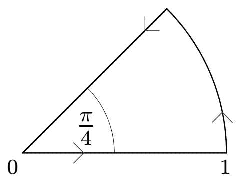
c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je:*



d) $\displaystyle\int_\Gamma |z|^2\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je:*



e) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\overline{z}}{z}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je čtvrtkružnice:*



Řešení: a) $5\pi\mathrm{j}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{4}{3}\,\mathrm{j}$; e) $1 + (\sqrt{2} - 1)\mathrm{j}$.

Ve všech příkladech v této kapitole jsme integrovali funkce, které nejsou holomorfní na $\mathbb{C}$. Byly to funkce $\mathcal{R}e\,z, \mathcal{I}m\,z, |z|, \overline{z},$ anebo funkce z nich složené. Budeme-li chtít integrovat holomorfní funkce, anebo funkce které jsou holomorfní až na konečný počet bodů v $\mathbb{C}$, nemusíme křivku parametrizovat, ale využíváme Cauchyovou větu, Cauchyův vzorec případně reziduovou větu.

4.2 Cauchyův vzorec a Cauchyova věta

Cauchyova věta. Jestliže funkce $f(z)$ je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti v níž leží křivka Γ, potom hodnota integrálu $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ nezávisí na tvaru křivky Γ, pouze na jejich krajných bodech. V takovém případě

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1),$$

kde z_1 je počáteční a z_2 koncový bod křivky Γ, a pro funkci $F(z)$ platí, že $F'(z) = f(z)$.

Pro uzavřenou křivku Γ v této oblasti platí, že $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Cauchyův vzorec. Jestliže funkce $f(z)$ je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω v níž leží uzavřená křivka Γ, potom platí

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \left\langle \begin{array}{l} 2\pi \mathrm{j}\, f(z_0), \quad \text{jestliže } z_0 \text{ leží uvnitř } \Gamma, \\ 0, \quad \text{jestliže } z_0 \text{ leží vně } \Gamma. \end{array} \right.$$

Příklad 4.2.1. *Vypočtěte následující integrály*

a) $\int_\Gamma z^2\,\mathrm{d}z$, *kde* $\Gamma : |z - 3 + 5\mathrm{j}\,| = \frac{1}{2}$ *je kladně orientovaná kružnice*

b) $\int_\Gamma e^z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je obvod obdélníka s vrcholy* $z_1 = -1,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1+\mathrm{j}\,,\ z_4 = -1+\mathrm{j}\,$, *kladně orientovaný*

c) $\int_\Gamma \sin \mathrm{j}\, z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je libovolná křivka spojující body* 0 *a* $\pi\mathrm{j}$

d) $\int_\Gamma \frac{e^z}{z - \mathrm{j}}\,\mathrm{d}z$, $\Gamma : |z + \mathrm{j}\,| = 1$ *je kladně orientovaná kružnice*

e) $\int_\Gamma \frac{z}{z + 2\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je trojúhelník spojující body* $0, 2\mathrm{j}$ *a* $3 + \mathrm{j}$

Řešení: a) z^2 je holomorfní funkce na množině $\mathbb{C}$, a proto $\int_\Gamma z^2\,\mathrm{d}z = \underline{\underline{0}}$.

b) e^z je holomorfní funkce na množině $\mathbb{C}$, a proto $\int_\Gamma e^z\,\mathrm{d}z = \underline{\underline{0}}$.

c) $\int_\Gamma \sin \mathrm{j}\, z\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{\mathrm{j}}\left[\cos \mathrm{j}\, z\right]_0^{\pi\mathrm{j}} = \mathrm{j}\,(\cos(-\pi) - \cos 0) = \mathrm{j}\,(-1-1) = \underline{\underline{-2\mathrm{j}}}\,$.

d) $\int_\Gamma \frac{e^z}{z - \mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = 0$; e) $\int_\Gamma \frac{z}{z + 2\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = 0$.

Příklad 4.2.2. *Využitím Cauchyho vzorce vypočtěte následující integrály*

a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z,$ *kde* $\Gamma : |z-1| = 1$ *je kladně orientovaná kružnice*

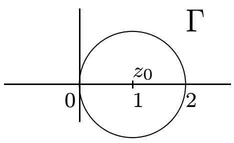
b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+2z+2}{z-2}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z| = 3,$ *kladně orientovaná*

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z+1| = 2,$ *kladně orientovaná*

d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z,$ $\Gamma : |z| = 1$ *je kladně orientovaná kružnice*

e) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2}{z+5-2\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z+\mathrm{j}\,| = 1,$ *kladně orientovaná*

Řešení: a) $f(z) = e^z$ je holomorfní funkce na množině $\mathbb{C}$, a bod $z_0 = 1$ leží uvnitř křivky Γ.



Dle Cauchyho vzorce $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z = \underline{\underline{2\pi\mathrm{j}\,e}}.$

b) V tomto případě $f(z) = z^2 + 2z + 2$ a $z_0 = 2$ leží uvnitř křivky Γ.

Podle Cauchyho vzorce $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+2z+2}{z-2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,(4+4+2) = \underline{\underline{20\pi\mathrm{j}}}.$

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{\mathrm{j}\,z}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,;$ d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,;$ e) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2}{z+5-2\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = 0.$

Příklad 4.2.3. *Využitím Cauchyho vzorce vypočtěte následující integrály*

a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+4)},$ *kde* $\Gamma : |z| = 1$ *je kladně orientovaná kružnice*

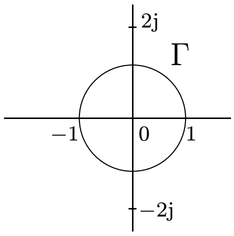
b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1},$ *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z-\mathrm{j}\,| = 1,$ *kladně orientovaná*

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z+1)^2},$ *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z-1-\mathrm{j}\,| = 2,$ *kladně orientovaná*

d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+2z-1}{z(z+2)}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z+2| = 1,$ *kladně orientovaná*

e) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1},$ *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z| = 3,$ *kladně orientovaná*

Řešení: a) Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)}$ je holomorfní na $\mathbb{C} - \{0, 2\mathrm{j}\,, -2\mathrm{j}\,\}$.



Bod $z_0 = 0$ leží uvnitř křivky Γ, další body, ve kterých funkce není holomorfní leží mimo křivku. Proto funkci upravíme takto:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z}.$$

Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ spolu s křivkou Γ a bodem $z_0 = 0$ splňují předpoklady k použití Cauchyho vzorce. Můžeme psát

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+4)} = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,\frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi\mathrm{j}\,}}.$$

b) Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z+\mathrm{j}\,)(z-\mathrm{j}\,)}$ je holomorfní na $\mathbb{C} - \{\mathrm{j}\,, -\mathrm{j}\,\}$.

Bod $z_0 = \mathrm{j}$ leží uvnitř křivky Γ, bod $z_1 = -\mathrm{j}$ leží mimo křivku.

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{z+\mathrm{j}}}{z-\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,\frac{1}{2\mathrm{j}} = \underline{\underline{\pi}}.$$

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z+1)^2} = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z+\mathrm{j}\,)(z+1)^2}}{z-\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{2}\mathrm{j}\,;$ d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+2z-1}{z(z+2)}\,\mathrm{d}z = \pi\mathrm{j}\,.$

e) Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z+\mathrm{j}\,)(z-\mathrm{j}\,)}$ je holomorfní na $\mathbb{C} - \{\mathrm{j}\,, -\mathrm{j}\,\}$.

Body $z_0 = \mathrm{j}\,$, a $z_1 = -\mathrm{j}$ leží uvnitř křivky Γ a nemůžeme použit Cauchyův vzorec pro tuto funkci ani po úpravě. Rozložíme funkci na parciální zlomky.

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z+\mathrm{j}} + \frac{B}{z-\mathrm{j}}$$

$$1 = A(z-\mathrm{j}\,) + B(z+\mathrm{j}\,) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\mathrm{j}}{2},\ B = -\frac{\mathrm{j}}{2}$$

Potom máme

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \frac{\mathrm{j}}{2}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+\mathrm{j}} - \frac{\mathrm{j}}{2}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}}{2}2\pi\mathrm{j} - \frac{\mathrm{j}}{2}2\pi\mathrm{j} = \underline{\underline{0}}.$$

(Použili jsme Cauchyův vzorec na každý integrál zvlášť.)

STUDIJNÍ JEDNOTKA

TEORIE REZIDUÍ

Cíle studijní jednotky. V této části ukážeme, jak se dá komplexní funkce rozvinout v mocninnou řadu. Také se naučíte rozpoznat singulární body funkce a určovat reziduum v těchto bodech. Nakonec ukážeme, jak pomocí reziduí počítat komplexní integrály.

5 Teorie reziduí

5.1 Laurentova řada

Nechť je Ω mezikruhová oblast se středem v bodě z_0. Jestliže komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v oblasti Ω, potom pro každé $z \in \Omega$ je možno funkci $f(z)$ vyjádřit **Laurentovou řadou:**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde konstanty a_n jsou určeny vzorci

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

a Γ je libovolná kružnice ležící v mezikruží Ω.

Část $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ se nazývá **hlavní část Laurentovy řady.**

Je vidět, že Taylorova řada je zvláštním případem Laurentovy řady, kde hlavní část se rovná 0.

Poznámka. Pro rozvoj racionální komplexní funkce v Laurentovu řadu využíváme vzorec na součet geometrické řady raději než výpočet jednotlivých koeficientů pomocí křivkového integrálu, jak jsme to uvedli v definici. Je to mnohem rychlejší a přehlednější. Zopakujme si proto geometrickou řadu.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_0 q^n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá **geometrická posloupnost.**

Je-li $|q] > 1$, geometrická řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ diverguje.

Je-li $|q| < 1$, je geometrická řada konvergentní a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \dfrac{a_0}{1-q}$.

Příklad 5.1.1. *Pro funkci* $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ *určete Laurentovu řadu se středem v bodě*

a) $z_0 = 0$ *b)* $z_0 = -1$ *c)* $z_0 = 1$

Řešení: a) Pro $|z| < 1$ je funkce $f(z)$ součtem geometrické řady,

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (-z)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n}} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

Tato řada je Taylorovou řadou.

Pro $|z| > 1$ je $|\frac{1}{z}| < 1$, a proto vyjdeme z jiného vyjádření funkce $f(z)$,

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}} = \frac{\frac{1}{z}}{1-(-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \cdot (-\frac{1}{z})^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}}}$$

b) V tomto případě funkce $f(z) = \dfrac{1}{1+z} = \dfrac{1}{z-(-1)}$ je dána přímo

Laurentova řadou, která se redukuje na jeden člen.

Laurentova řada funkce je tedy $f(z) = \underline{\underline{(z+1)^{-1}}}$.

c) Funkci upravíme, abychom dostali součet geometrické řady, kde kvocient se dá vyjádřit pomocí $z - 1$.

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+(z-1)+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2(1+\frac{z-1}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}.$$

Pro $|\frac{z-1}{2}| < 1$ platí

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}}}.$$

Pro $|\frac{z-1}{2}| > 1$ upravujeme podobně jako v části a).

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{2}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-1} \cdot \left(-\frac{2}{z-1}\right)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}}}.$$

5.2 Singulární body komplexní funkce, reziduová věta

Nechť komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v určitém okolí bodu z_0 s výjimkou bodu z_0. Pak z_0 se nazývá **singulárním bodem** funkce $f(z)$.

Klasifikace singulárních bodů:

odstranitelná singularita — hlavní část Laurentovy řady v bodě z_0 se rovná 0 a zřejmě $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0$, a je tedy konečná,

podstatná singularita — hlavní část Laurentovy řady v bodě z_0 má nekonečně mnoho nenulových členů, $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje,

pól m-tého řádu — hlavní část Laurentovy řady v bodě z_0 má konečně mnoho nenulových koeficientů, tj. $a_n = 0$ pro $n < -m$, $a_{-m} \neq 0$, a platí, že $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Nejdůležitějšími singulárními body komplexní funkce jsou póly. Pro určení řádu pólu užíváme limity $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = a_{-m}$, která musí být vždy konečná a nenulová.

Koeficient a_{-1} z Laurentovy řady funkce $f(z)$ v bodě z_0 se nazývá **reziduem funkce** $f(z)$ **v bodě** z_0. Značíme $a_{-1} = \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$.

Vzorec na výpočet rezidua pro pól prvního řádu

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z)}$$

Vzorec na výpočet rezidua pro pól m-tého řádu

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]}$$

Nechť $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou holomorfní v bodě z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Potom má funkce $f(z)$ v bodě z_0 pól prvního řádu a platí, že

$$\boxed{\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$$

Reziduová věta. Nechť komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř a na jednoduché uzavřené, kladně orientované křivce Γ s výjimkou pólů $z_1, z_2, \ldots, z_n$ uvnitř křivky Γ, potom

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{j} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)}$$

Sčítáme tedy pouze rezidua v pólech, které leží uvnitř křivky Γ.

Příklad 5.2.1. *Vypočítejte rezidua v pólech funkce* $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$.

Řešení: Funkce $f(z)$ je racionální lomená funkce, takže má za singularity pouze póly, a to jsou kořeny jmenovatele.

Řešíme rovnici $z^3 - z^5 = 0$, $z^3(1-z^2) = 0$, $z^3(1-z)(1+z) = 0$. Máme dva jednoduché kořeny $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, a jeden trojnásobný kořen $z_3 = 0$.

Funkce $f(z)$ má v bodech $z_1 = 1$ a $z_2 = -1$ póly prvního řádu a v bodě $z_3 = 0$ pól třetího řádu.

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z^3-z^5} = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{z^3(1-z)(1+z)} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{-z^3(1+z)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{z^3-z^5} = \lim_{z\to -1}\frac{(z+1)}{z^3(1-z)(1+z)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}},$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\frac{1}{z^3-z^5}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^3}{z^3(1-z^2)}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z}{(1-z^2)^2}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2(1-z^2)^2 + 2z2(1-z^2)2z}{(1-z^2)^4} = \underline{\underline{1}}.$$

Příklad 5.2.2. *Vypočítejte rezidua v pólech funkce* $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$.

Řešení: Řešíme rovnici $(1+z^2)^2 = 0$, $(z+\mathrm{j})^2(z-\mathrm{j})^2 = 0$.

Funkce $f(z)$ má v bodech $z_1 = \mathrm{j}$ a $z_2 = -\mathrm{j}$ póly druhého řádu.

$$\operatorname*{res}_{z=\mathrm{j}} f(z) = \lim_{z\to \mathrm{j}}\left((z-\mathrm{j})^2\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right)' = \lim_{z\to \mathrm{j}}\left(\frac{z^2(z-\mathrm{j})^2}{(z-\mathrm{j})^2)(z+\mathrm{j})^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to \mathrm{j}}\left(\frac{z^2}{(z+\mathrm{j})^2}\right)' = \lim_{z\to \mathrm{j}}\frac{2z\mathrm{j}}{(z+\mathrm{j})^3} = \frac{1}{4\mathrm{j}} = \underline{\underline{-\frac{\mathrm{j}}{4}}},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-\mathrm{j}} f(z) = \lim_{z\to \mathrm{j}}\left((z+\mathrm{j})^2\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right)' = \lim_{z\to \mathrm{j}}\frac{-2z\mathrm{j}}{(z-\mathrm{j})^3} = \frac{-1}{4\mathrm{j}} = \underline{\underline{\frac{\mathrm{j}}{4}}}.$$

Příklad 5.2.3. *Vypočítejte rezidua v pólech funkce* $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$.

Řešení: Funkce $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde $\varphi(z) = 1$ a $\psi(z) = \sin z$ jsou holomorfní funkce na $\mathbb{C}$, funkce $\varphi(z) = 1$ je nenulová všude a $\psi(z) = \sin z = 0$ v bodech $z_k = k\pi$, k celé. Navíc $\sin' z = \cos z$ je v bodech z_k nenulové.

Funkce $f(z)$ má tehdy v bodech $z_k = k\pi$, k celé, póly prvního řádu a

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{\sin' k\pi} = \frac{1}{\cos k\pi} = \frac{1}{(-1)^k} = \underline{\underline{(-1)^k}}.$$

Příklad 5.2.4. *Vypočítejte rezidua v pólech daných funkcí*

$a)\ f(z) = \dfrac{1}{1+z^4} \qquad b)\ f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$

Řešení: a) Funkce $f(z)$ je podílem dvou holomorfních funkcí, kde $\varphi(z) = 1$ je nenulová na $\mathbb{C}$. Musíme vyřešit rovnici $1+z^4 = 0$. Je to binomická rovnice, po úpravě máme $z^4 = -1$. Při řešení této rovnice využijeme zápis komplexních čísel v goniometrickém tvaru na obou stranách rovnice a Moivreovou větu.

Dostaneme kořeny $z_k = \dfrac{(2k+1)\pi\mathrm{j}}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Navíc $(1+z^4)' = 4z^3$ je v bodech z_k nenulové.

Funkce $f(z)$ má tehdy v bodech $z_1 = \dfrac{\pi}{4}\mathrm{j}$, $z_2 = \dfrac{3\pi}{4}\mathrm{j}$, $z_3 = \dfrac{5\pi}{4}\mathrm{j}$ a $z_4 = \dfrac{7\pi}{4}\mathrm{j}$

póly prvního řádu a $\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \dfrac{1}{4z_k^3} = \dfrac{z_k}{4z_k^4} = \dfrac{z_k}{4(-1)} = -\underline{\underline{\dfrac{z_k}{4}}}.$

b) Postupujeme podobně jako v části a). Řešíme binomickou rovnici $1+z^n = 0$.

Dostaneme kořeny $z_k = \dfrac{(2k+1)\pi\mathrm{j}}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Derivace $(1+z^n)' = nz^{n-1}$ je v bodech z_k nenulové. Jsou to póly prvního řádu.

$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \dfrac{1}{nz_k^{n-1}} = \dfrac{z_k}{nz_k^n} = \dfrac{z_k}{n(-1)} = -\underline{\underline{\dfrac{z_k}{n}}}.$

Příklad 5.2.5. *Určete u daných funkcí řád pólů a vypočítejte rezidua v těchto pólech*

$a)\ f(z) = \dfrac{1}{z(1-z^2)} \qquad b)\ f(z) = \dfrac{1}{1+z^3} \qquad c)\ f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$

$d)\ f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z-1)} \qquad e)\ f(z) = \dfrac{1}{\cos z}, \qquad f)\ f(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$

Řešení: a) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}$;

b) $\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}} f(z) = -\frac{1}{6}(1+\sqrt{3}\mathrm{j})$, $\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}} f(z) = -\frac{1}{6}(1-\sqrt{3}\mathrm{j})$

$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{3}$; c) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 1$, $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -1$;

d) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{4}$, $\operatorname*{res}_{z=\mathrm{j}} f(z) = -\frac{1}{8}$, $\operatorname*{res}_{z=-\mathrm{j}} f(z) = -\frac{1}{8}$;

e) $\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} f(z) = (-1)^{k+1}$, k celé; f) $\operatorname*{res}_{z=2k\pi\mathrm{j}} f(z) = 1$, k celé.

Příklad 5.2.6. *Vypočtěte následující integrály pomocí reziduí*

a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, *kde* $\Gamma : |z| = \frac{1}{2}$ *je kladně orientovaná kružnice*

b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$, *kde* $\Gamma : |z+1+\mathrm{j}\,| = 2$ *je kladně orientovaná kružnice*

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$, *kde* $\Gamma : |z| = \frac{1}{2}$ *je kladně orientovaná kružnice*

d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, *kde* $\Gamma : |z| = 2$ *je kladně orientovaná kružnice*

e) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+z+1}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$, *kde* $\Gamma : |z| = 2$ *je kladně orientovaná kružnice*

Řešení: a) Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$ má v bodě $z_1 = 0$ pól prvního řádu a v bodě $z_2 = 1$ pól druhého řádu.

Z obou pólů leží uvnitř křivky Γ pouze pól $z_1 = 0$ a $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$.

Podle reziduové věty $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \underline{\underline{2\pi\mathrm{j}}}\,.$

b) Funkce $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$ má v bodech $z_1 = 0$, $z_2 = \mathrm{j}$ a $z_3 = -\mathrm{j}$ póly prvního řádu. Uvnitř křivky Γ leží pouze póly $z_1 = 0$ a $z_3 = -\mathrm{j}$.

Dále $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$ a $\operatorname*{res}_{z=-\mathrm{j}} f(z) = -\frac{e^{-\mathrm{j}}}{2}$.

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,(\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-\mathrm{j}} f(z)) = 2\pi\mathrm{j}\,(1 - \frac{e^{-\mathrm{j}}}{2}) =$$

$$= \underline{\underline{-\pi\sin 1 + \mathrm{j}\,(2\pi - \pi\cos 1)}}.$$

c) $2\pi\mathrm{j}$; d) 0; e) $2\pi\mathrm{j}$.

STUDIJNÍ JEDNOTKA

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Cíle studijní jednotky. V této části se naučíte řešit diferenciální rovnice pomocí Laplaceovy transformace. Ukážeme, jak se dají řešit pomocí Laplaceovy transformace integrálně diferenciální rovnice a také diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou.

6 Laplaceova integrální transformace

6.1 Definice a vlastnosti Laplaceovy transformace

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje následující podmínky:

1. funkce $f(t)$ je po částech spojitá,
2. funkce $f(t) = 0$ pro $t < 0$,
3. funkce $f(t)$ je exponenciálního řádu, tzn. existují konstanty $M, s, t_0 \in \mathbb{R},\ M, t_0 > 0$, takové, že pro všechna $t \geq t_0$ platí $|f(t)| \leq Me^{st}$.

Potom definujeme funkci komplexní proměnné

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\ e^{-pt}\ \mathrm{d}t$$

a říkáme ji **Laplaceova transformace funkce** $f(t)$. Značíme $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Funkce $f(t)$, která splňuje podmínky 1., 2., 3. se nazývá **předmět** a funkce $F(p)$ se nazývá **obraz** funkce $f(t)$.

Budeme předpokládat, že podmínka 2. je automaticky splněná.
Např. výrazem $\mathcal{L}\{e^t\}$ rozumíme obraz funkce $f(t) = 0$ pro $t < 0$ a $f(t) = e^t$ pro $t \geq 0$.

Laplaceova transformace je lineární:

$$\mathcal{L}\{a\, f(t) + b\, g(t)\} = a\, \mathcal{L}\{f(t)\} + b\, \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Základní slovník a gramatika Laplaceovy transformace

Číslo vzorce	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$
1.	c	$\frac{c}{p}$
2.	$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
4.	$t^n e^{at},\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
7.	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
8.	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
9.	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
10.	$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
11.	$f'''(t)$	$p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$
12.	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
13.	$\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$	$\frac{F(p)}{p}$
14.	$f(t-a),\ a \geq 0$	$e^{-ap}F(p)$

Příklad 6.1.1. *Přímým výpočtem určete obraz funkce* $f(t) = t$.

Řešení: Budeme hledat obraz funkce

$$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{array} \right.$$

Tato funkce je spojitá, její derivace je po částech spojitá ($f'(t) = 0$ pro $t < 0$ a $f'(t) = 1$ pro $t > 0$) a splňuje podmínku 2. Zbývá ověřit 3. podmínku. Platí, že $t < e^t$ pro $t \geq 0$. Daná funkce je vzorem Laplaceovy transformace.

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \int_0^A te^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Integrál spočítáme metodou per partes:

$$\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-pt} & v = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{array}$$

po dosazení

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{A\to\infty} \int_0^A t\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \left(\left[-\frac{t}{p}\,e^{-pt} \right]_0^A - \int_0^A (-\frac{1}{p})\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t \right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{A}{p}\,e^{-pA} + \frac{1}{p} \int_0^A e^{-pt}\,\mathrm{d}t \right) = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{A}{p\,e^{pA}} + \frac{1}{p} \left[-\frac{1}{p}\,e^{-pt} \right]_0^A \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{pro} \quad \mathcal{R}e\,p > 0 \quad \text{je} \\ \lim\limits_{A\to\infty} \dfrac{A}{p\,e^{pA}} = 0 \end{array} \right| = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{p^2}\,(e^{-pA} - 1) \right) = \underline{\underline{\frac{1}{p^2}}}.$$

Příklad 6.1.2. *Pomoci tabulky určete obraz funkce* $f(t) = t^3 + 3t^2 + 2t + 1$.

Řešení: Budeme používat vzorec číslo 2.

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{p^4} = \frac{6}{p^4}, \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{p^3} = \frac{2}{p^3}, \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{p^2}, \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}.$$

Z linearity Laplaceovy transformace dostaneme

$$\mathcal{L}\{t^3 + 3t^2 + 2t + 1\} = \frac{6}{p^4} + 3\frac{2}{p^3} + 2\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} = \underline{\underline{\frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}}}.$$

6.2 Zpětná Laplaceova transformace

Přechod od operátorové funkce $F(p)$ ke vzoru $f(t)$ se nazývá **zpětná Laplaceova transformace** a značí se symbolem $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$.

Ke každému obrazu je předmět určen jednoznačně. Při hledání předmětu užíváme pak slovník Laplaceovy transformace nebo použijeme tzv. Heavisideovu větu o rozkladu.

Věta o rozkladu. Nechť operátorová funkce $F(p)$ má tvar ryze racionální lomené funkce

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

kde $M(p)$ a $N(p)$ jsou polynomy a stupeň polynomu $M(p)$ je menší než stupeň polynomu $N(p)$. Označme p_k póly funkce $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$. Pak pro zpětnou Laplaceovou transformaci funkce $F(p)$ platí

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \sum_{p_k} \operatorname*{res}_{p=p_k} \left[F(p)\, e^{pt} \right], \quad t > 0}$$

Poznámka. Jestliže funkce $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ s reálnými koeficienty má komplexní póly $p_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{j}\,\beta$, stačí vypočítat reziduum pouze pro jeden kořen, protože platí:

$$\boxed{\operatorname*{res}_{p=\alpha+\mathrm{j}\,\beta} \left[F(p)\, e^{pt} \right] + \operatorname*{res}_{p=\alpha-\mathrm{j}\,\beta} \left[F(p)\, e^{pt} \right] = 2\mathcal{R}e \operatorname*{res}_{p=\alpha+\mathrm{j}\,\beta} \left[F(p)\, e^{pt} \right]}$$

Příklad 6.2.1. *Najděte vzor funkce* $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p-4)}$.

Řešení: 1. Při hledání vzoru pomocí tabulky nejdřív musíme funkci rozložit na parciální zlomky a pak použít vzorce z tabulky na všechny parciální zlomky postupně.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p-4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4p^2} - \frac{1}{16p} + \frac{1}{16(p-4)}\right\} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}e^{4t}}}.$$

2. Při hledání vzoru pomocí věty o rozkladu nejdřív najděme póly funkce. Funkce $F(p) = \frac{1}{p^2(p-4)}$ má v bodě $p_1 = 0$ pól druhého řádu a v bodě $p_2 = 4$ pól prvního řádu. Vypočítáme příslušná rezidua a dosadíme.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p-4)}\right\} = \operatorname*{res}_{p=0} F(p)\, e^{pt} + \operatorname*{res}_{p=4} F(p)\, e^{pt} = \lim_{p\to 0}\left(p^2 \frac{e^{pt}}{p^2(p-4)}\right)' +$$

$$+ \lim_{p\to 4}\left((p-4)\frac{e^{pt}}{p^2(p-4)}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}t(p-4) - e^{pt}}{(p-4)^2}\right) + \lim_{p\to 4}\frac{e^{pt}}{p^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}e^{4t}}}.$$

Příklad 6.2.2. *Pomoci tabulky najděte vzory daných obrazů* $F(p)$

a) $F(p) = \dfrac{3}{p-8}$ *b)* $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4}$ *c)* $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2+9}$

d) $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2+2p+2}$ *e)* $F(p) = \dfrac{p}{p^2+2p+2}$ *f)* $F(p) = \dfrac{2p}{p^2+4p+7}$

g) $F(p) = \dfrac{p+1}{p(p+2)}$ *h)* $F(p) = \dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$

Řešení:

a) $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{p-8}\right\} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p-8}\right\} = \underline{\underline{3e^{8t}}}.$ (Vzorec č. 3.)

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p^2+4}\right\} = \dfrac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{p^2+4}\right\} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}\sin 2t}}.$ (Vzorec č. 6.)

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+1}{p^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+9} + \dfrac{1}{p^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+9}\right\} + \dfrac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{p^2+9}\right\} =$

$= \underline{\underline{\cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t}}.$ (Vzorce č. 5. a 6.)

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+1}{p^2+2p+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}\right\} = \underline{\underline{e^{-t}\cos t}}.$ (Vzorec č. 7.)

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+2p+2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+1-1}{(p+1)^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}\right\} -$

$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p+1)^2+1}\right\} = \underline{\underline{e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t}}.$ (Vzorce č. 7. a 8.)

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2p}{p^2+4p+7}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+2-2}{(p+2)^2+3}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+2}{(p+2)^2+3}\right\} -$

$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{(p+2)^2+3}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+2}{(p+2)^2+3}\right\} - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{(p+2)^2+3}\right\} =$

$= \underline{\underline{2e^{-2t}\cos\sqrt{3}\,t - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\,e^{-2t}\sin\sqrt{3}\,t}}.$ (Vzorce č. 7. a 8.)

g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+1}{p(p+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{2p} + \dfrac{1}{2(p+2)}\right\} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,e^{-2t}}}$ (Vzorce č. 1. a 3.)

h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{-p+2}{(p+1)^2+4}\right\} =$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{p+1}{(p+1)^2+4} + \dfrac{3}{2}\dfrac{2}{(p+1)^2+4}\right\} = \underline{\underline{e^{t} - e^{-t}\cos 2t + \dfrac{3}{2}e^{-t}\sin 2t.}}$

(Vzorce č. 3., 7. a 8.)

Příklad 6.2.3. *Pomoci věty o rozkladu najděte vzory daných obrazů $F(p)$.*

a) $F(p) = \dfrac{p+2}{p^2-4p+3}$ b) $F(p) = \dfrac{p^2+1}{(p+1)^2(p-1)}$

c) $F(p) = \dfrac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}$ d) $F(p) = \dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$

Řešení: a) Funkce $\frac{p+2}{p^2-4p+3}$ má póly prvního řádu v bodech $p_1 = 3$ a $p_2 = 1$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+2}{p^2-4p+3}\right\} = \operatorname*{res}_{p=p_1} F(p)\, e^{pt} + \operatorname*{res}_{p=p_2} F(p)\, e^{pt} =$$

$$\lim_{p\to 3}\left((p-3)\frac{(p+2)e^{pt}}{(p-3)(p-1)}\right) + \lim_{p\to 1}\left((p-1)\frac{(p+2)e^{pt}}{(p-3)(p-1)}\right) = \underline{\underline{\frac{5}{2}\, e^{3t} - \frac{3}{2}\, e^{t}}}.$$

b) Funkce $F(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)^2(p-1)}$ má pól druhého řádu v bodě $p_1 = -1$ a pól prvního řádu v bodě $p_2 = 1$.

Potom $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{p^2+1}{(p+1)^2(p-1)}\right\} = \operatorname*{res}_{p=1} F(p)\, e^{pt} + \operatorname*{res}_{p=-1} F(p)\, e^{pt} =$

$$= \lim_{p\to 1}\left((p-1)\frac{(p^2+1)e^{pt}}{(p+1)^2(p-1)}\right) + \lim_{p\to -1}\left((p+1)^2\frac{(p^2+1)e^{pt}}{(p+1)^2(p-1)}\right)' =$$

$$\lim_{p\to 1}\frac{(p^2+1)e^{pt}}{(p+1)^2} + \lim_{p\to -1}\frac{(2pe^{pt} + (p^2+1)e^{pt}t)(p-1) - (p^2+1)e^{pt}}{(p-1)^2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\, e^{t} + \frac{1}{2}\, e^{-t} - te^{-t}}}.$$

c) Funkce $F(p) = \frac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)} = \frac{p^2+p-1}{(p-2)(p-5)(p+4)}$ má v bodech $p_1 = 2,\ p_2 = 5$ a $p_3 = -4$ póly prvního řádu.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}\right\} = \operatorname*{res}_{p=2} F(p)\, e^{pt} + \operatorname*{res}_{p=5} F(p)\, e^{pt} + \operatorname*{res}_{p=-4} F(p)\, e^{pt} =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{5}{18}\, e^{2t} + \frac{29}{27}\, e^{5t} + \frac{11}{54}\, e^{-4t}}}.$$

d) Funkce $F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$ má póly prvního řádu v bodech $p_1 = 1$, $p_2 = -1+2\mathrm{j}$ a $p_3 = -1-2\mathrm{j}$.

Nejdřív spočítáme reziduum v bodě $p_2 = -1+2\mathrm{j}$.

$$\operatorname*{res}_{p=p_2} F(p)\, e^{pt} = \lim_{p\to -1+2\mathrm{j}}\left((p+1-2\mathrm{j})\frac{(5p+3)e^{pt}}{(p-1)(p+1-2\mathrm{j})(p+1+2\mathrm{j})}\right) =$$

$$= \lim_{p\to -1+2\mathrm{j}} \frac{(5p+3)e^{pt}}{(p-1)(p+1+2\mathrm{j})} = -\frac{2+3\mathrm{j}}{4}\, e^{(-1+2\mathrm{j})t}.$$

Platí, že $\operatorname*{res}_{p=p_2} F(p)\,e^{pt} + \operatorname*{res}_{p=p_3} F(p)\,e^{pt} = 2\mathcal{R}e \operatorname*{res}_{p=p_2} F(p)\,e^{pt} =$

$$= 2\mathcal{R}e\left(-\frac{2+3\mathrm{j}}{4}\;e^{-t}(\cos 2t + \mathrm{j}\,\sin 2t)\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\;e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{4}\;e^{-t}\sin 2t\right).$$

Ještě spočítáme, že $\operatorname*{res}_{p=p_1} F(p)\,e^{pt} = e^t$ a výsledky sečteme.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}\right\} = \underline{\underline{e^t - e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{2}\;e^{-t}\sin 2t.}}$$

Příklad 6.2.4. *Najděte vzory daných obrazů* $F(p)$

a) $F(p) = \dfrac{p^2+4}{p^3+p^2-2p}$

b) $F(p) = \dfrac{4}{(p+1)^4} - \dfrac{p}{p^2+2}$

c) $F(p) = \dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$

d) $F(p) = \dfrac{1}{(p+3)(p-2)^2}$

e) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$

f) $F(p) = \dfrac{p^2+1}{p\,(p+2)(p+1)}$

Řešení: a) $f(t) = -2 + \frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^t$; b) $f(t) = \frac{2}{3}t^3e^{-t} - \cos\sqrt{2}t$;
c) $f(t) = \frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t)$; d) $f(t) = \frac{1}{25}(e^{-3t} + (5t-1)e^{2t})$;
e) $f(t) = \frac{1}{2}t^2e^{2t} - 4te^{2t} + 6e^{2t} - 2te^t - 6e^t$; f) $f(t) = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}$.

6.3 Řešení diferenciálních rovnic Laplaceovou transformaci

Ze základního slovníku Laplacovy transformace víme, že operaci derivování podle t v prostoru předmětů odpovídá násobení proměnnou p v prostoru obrazů. Můžeme proto očekávat, že Laplaceova transformace převede jisté typy diferenciálních rovnic na algebraické.

Řešení difernciálních rovnic Laplaceovou transformaci můžeme schematicky znázornit takto:

Prostor předmětu:	diferenciální rovnice + + počáteční podmínky		řešení diferenciální rovnice vyhovující počátečním podmínkám
	$\downarrow$		$\uparrow$
	$\mathcal{L}-$transformace rovnice		$\mathcal{L}^{-1}-$transformace řešení
	$\downarrow$		$\uparrow$
Prostor obrazů:	algebraická rovnice	$\longrightarrow$	řešení

Uvedený způsob řešení můžeme použít i pro řešení integrálně diferenciálních rovnic, kde se v rovnici objevuje i integrál neznámé funkce.

Příklad 6.3.1. *Laplaceovou transformací řešte následující diferenciální rovnice*

a) $y' - 2y = 1,\ \ y(0) = -2$

b) $y''' + y' = e^{2t},\ \ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

c) $y'' + 4y' + 8y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

d) $y'' - 18y' + 72y = -36\,t\,e^{6t}\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$

e) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ \ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 4$

f) $y'' - 4y = 4t,\ \ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$

g) $y''' - 3y' + 2y = 8te^{-t},\ \ y(0) = y'(0) = 0\ ,\ y''(0) = 1$

Řešení: Podle tabulky přetransformujeme celou rovnici.

a) $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p);\quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p) - (-2);\quad \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{p}.$

Dostali jsme rovnici $pY(p) + 2 - 2Y(p) = \dfrac{1}{p}$, z které vyjádříme $Y(p)$.

$Y(p)(p-2) = \dfrac{1}{p} - 2;\quad Y(p) = \dfrac{1-2p}{p(p-2)} = -\dfrac{1}{2p} - \dfrac{3}{2(p-2)}.$

Zpětnou transformací dostaneme, že $\underline{\underline{y(t) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\,e^{2t}.}}$

b) $\mathcal{L}\{y'''(t)\} = p^3Y(p);\quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p);\quad \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \dfrac{1}{p-2}.$

Dostali jsme rovnici $p^3Y(p) + pY(p) = \dfrac{1}{p-2}$, z které $Y(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)(p-2)}$.

K zpětné transformaci použijeme větu o rozkladu.

$$\underline{\underline{y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\,e^{2t} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t.}}$$

c) $\mathcal{L}\{y''(t)\} = p^2Y(p) - 1;\quad \mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p);\quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p).$

$$p^2Y(p) - 1 + 4pY(p) + 8Y(p) = 0;\quad Y(p)(p^2+4p+8) = 1,$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+4p+8} = \frac{1}{(p+2)^2+4},$$

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t.}}$$

d) $y = (t + 3t^2)\,e^{6t}$; e) $y = e^{3t} + te^{3t}$; f) $y = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} - t$;

g) $y = 2te^{-t} + te^{t} - e^{t} + e^{-2t}$.

Příklad 6.3.2. *Laplaceovou transformací řešte následující integrálně diferenciální rovnice*

a) $y' + 2y + 2\displaystyle\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s = 1,\ \ y(0) = 0$

b) $y' + 2y + 5\displaystyle\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s = 2,\ \ y(0) = 1$

Řešení:

a) $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p);\ \mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p);\ \mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s\right\} = \dfrac{1}{p}Y(p);\ \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{p}.$

Dostali jsme rovnici $pY(p) + 2Y(p) + \dfrac{2}{p}Y(p) = \dfrac{1}{p}$, z které vyjádříme $Y(p)$.

Máme $Y(p) = \dfrac{1}{p^2+2p+2} = \dfrac{1}{(p+1)^2+1}$. Potom $\underline{\underline{y(t) = e^{-t}\sin t.}}$

b) $\mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p) - 1;\quad \mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s\right\} = \dfrac{1}{p}Y(p);\ \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{p}.$

Řešíme algebraickou rovnici $pY(p) - 1 + 2Y(p) + \dfrac{5}{p}Y(p) = \dfrac{2}{p}$.

Z toho $Y(p) = \dfrac{2+p}{p^2+2p+5} = \dfrac{p+1+1}{(p+1)^2+4} = \dfrac{p+1}{(p+1)^2+4} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{(p+1)^2+4}.$

Potom $\underline{\underline{y(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.}}$

Příklad 6.3.3. *Najděte proudovou odezvu v jednoduchém RLC obvodu, kde odpor resistoru je $R = 20\,\Omega$, samoindukce cívky je $L = 0{,}1\,H$, kapacita kondenzátoru je $C = 1\,\mu F = 10^{-6}\,F$ a napětí $U = 100\,V$. Počáteční proud je $i(0) = 0$.*

Řešení: Proud v obvodu splňuje integrálně diferenciální rovnici

$$R\,i(t) + L\,i'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,\mathrm{d}s = U,\ \ i(0) = 0.$$

Dosadíme do rovnice za R, L, C a U. Vzniklou rovnici budeme řešit pomocí Laplaceovy transformace: $20\,i(t) + 0{,}1\,i'(t) + 10^6\displaystyle\int_0^t i(s)\,\mathrm{d}s = 100,\ \ i(0) = 0.$

$$20\,I(p) + 0{,}1\,p\,I(p) + \frac{10^6}{p}I(p) = \frac{100}{p}.$$

Vyjádříme $I(p)$: $I(p) = \dfrac{100}{p}\cdot\dfrac{p}{0{,}1p^2+20p+10^6} = \dfrac{1000}{p^2+200p+10^7} =$

$$= \frac{1000}{(p+100)^2+9990000} \doteq \frac{1000}{(p+100)^2+3160^2} \doteq 0{,}3\cdot\frac{3160}{(p+100)^2+3160^2}.$$

Zpětnou transformací dostaneme, že $\underline{\underline{i(t) = 0{,}3\,e^{-100t}\sin 3160t.}}$

6.4 Laplaceovy obrazy konečných impulsů

Při hledání obrazů konečných impulsů užíváme tzv. Diracovou impuls. Jedná se o zobecněnou funkci $\delta(t-a)$, soustředěnou do bodu $a \in \mathbb{R}^+$, která má následující vlastnosti:

1. $\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{pro } t = a \\ 0 & \text{pro } t \neq a \end{cases}$
2. $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = 1$
3. $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-ap}$
4. $\mathcal{L}\{\delta'(t-a)\} = p\,e^{-ap}$
5. $\mathcal{L}\{\delta^n(t-a)\} = p^n\,e^{-ap}$

Zobecněná derivace nespojité funkce v bodě t_0, kde má daná funkce skok k, se rovná $k\delta(t-t_0)$. Na základě toho napíšeme zobecněnou derivaci konečného impulsu jako součet Diracových impulsů a jejich derivací a použijeme Laplaceovou transformaci na vzniklou rovnici. Postup ukážeme na příkladě.

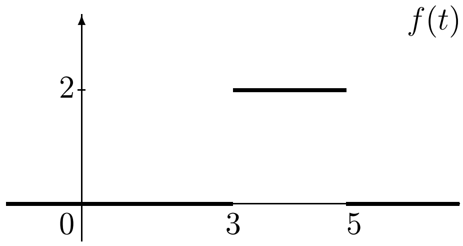
Příklad 6.4.1. *Určete Laplaceovu transformaci funkcí*

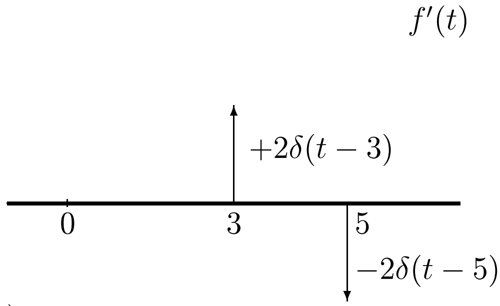
a) $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } t \in \langle 3,5\rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 3,5\rangle \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{pro } t \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0,1\rangle \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} t-t^2 & \text{pro } t \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0,1\rangle \end{cases}$ d) $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } t \in \langle 0,1\rangle \\ 2 & \text{pro } t \in \langle 1,3\rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} 4-t & \text{pro } t \in \langle 1,4\rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 1,4\rangle \end{cases}$ f) $f(t) = \begin{cases} 3t & \text{pro } t \in \langle 0,3\rangle \\ 0 & \text{pro } t \notin \langle 0,3\rangle \end{cases}$

Řešení: a) Nakreslíme grafy funkcí $f(t)$ a $f'(t)$.





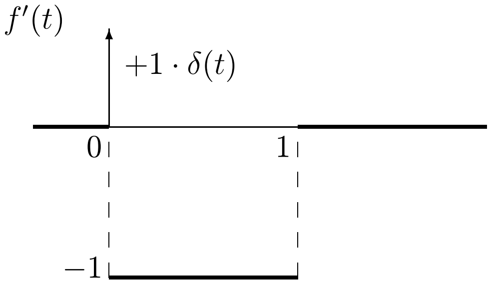
Vidíme, že $f'(t) = 2\delta(t-3) - 2\delta(t-5)$.

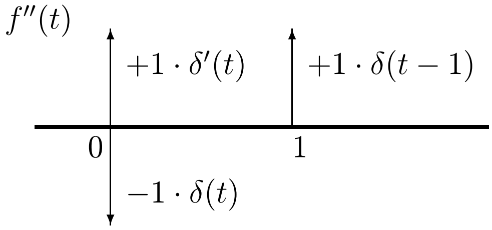
Použijeme Laplaceovou transformaci na obě strany rovnice. Dostaneme

$$pF(p) = \mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{2\delta(t-3) - 2\delta(t-5)\} = 2e^{-3p} - 2e^{-5p}.$$

Z vnější rovnosti vyjádříme $\underline{\underline{F(p) = \dfrac{2}{p}\left(e^{-3p} - e^{-5p}\right)}}$.

b) Po nakreslení obrázku funkce a její zobecněné derivace dostaneme pořád nespojitou funkci. Až druhou derivaci můžeme vyjádřit pouze pomocí Diracových impulsů.

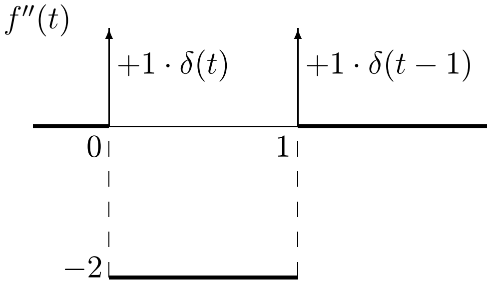


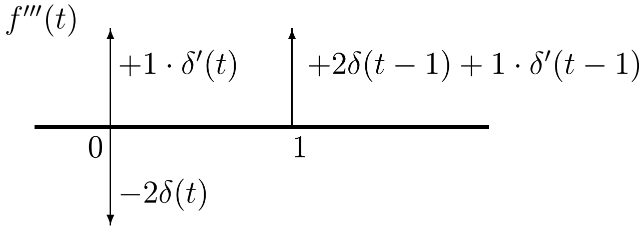


$$f''(t) = \delta'(t) - \delta(t) + \delta(t-1),$$

$p^2F(p) = \mathcal{L}\{f''(t)\} = p - 1 + e^{-p}$. Z toho $F(p) = \dfrac{1}{p^2}\left(p - 1 + e^{-p}\right)$.

c) Až v druhé a třetí zobecěné derivaci se objeví Diracovy impulsy.

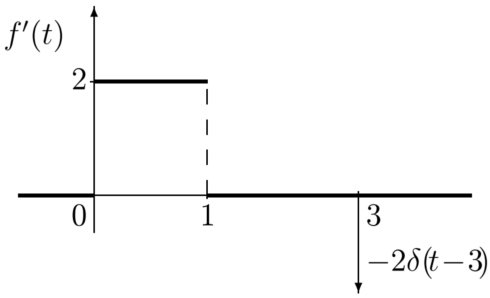


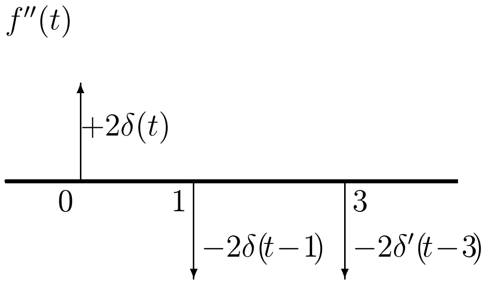


$$f'''(t) = \delta'(t) - 2\delta(t) + 2\delta(t-1) + \delta'(t-1).$$

Potom $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{p^3}\left(p - 2 + 2\,e^{-p} + p\,e^{-p}\right)$.

d) I v tomto příkladě musíme počítat druhou zobecněnou derivaci dané funkce.





$$p^2F(p) = \mathcal{L}\{2\delta(t) - 2\delta(t-1) - 2\delta'(t-3)\} = 2 - 2\,e^{-p} - 2p\,e^{-3p}.$$

Z toho $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{p^2}\left(2 - 2\,e^{-p} - 2p\,e^{-3p}\right)$.

e) $F(p) = \frac{1}{p^2}\,(3p\,e^{-p} - e^{-p} + e^{-4p})$; f) $F(p) = \frac{1}{p^2}\,(3 - 9p\,e^{-3p} - 3\,e^{-3p})$.

STUDIJNÍ JEDNOTKA

FOURIEROVY ŘADY

Cíle studijní jednotky. V této části ukážeme, jak je možné danou reálnou funkci na konečném intervalu vyjádřit ve tvaru nekonečné řady ze sinů a kosinů - tedy ve tvaru Fourierovy řady.

7 Fourierovy řady

7.1 Definice a vlastnosti Fourierovy řady

Nekonečná řada, která má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

se nazývá **trigonometrickou řadou** s periodou T.

Nechť $T > 0$ a $f : \langle a, a+T \rangle \to \mathbb{R}$ je reálná funkce reálné proměnné, která je na tomto intervalu po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci (říkáme, že funkce je po částech hladká). Potom můžeme k funkci f sestrojit v trigonometrickou řadu periodou T, ve které pro čísla a_n, b_n platí

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t \;\mathrm{d}t, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t \;\mathrm{d}t$$

a kterou nazýváme **Fourierovou řadou funkce** f a píšeme

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Čísla a_n, b_n se nazývají **Fourierovy koeficienty**. Symbol $\approx$ znamená skoro rovnost. Kdy se funkce přesně rovná své Fourierové řadě a jak se chová v bodech, kde rovnost neplatí uvádíme níže.

Součet Fourierovy řady je roven zadané funkci tam, kde je funkce spojitá:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = f(t), \quad t \in (a, a+T),$$

$t \in (a, a+T)$, funkce spojitá v t.

V bodech nespojitosti se součet rovna aritmetickému průměru limity zprava a limity zleva:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)],$$

$t \in (a, a+T)$, funkce nespojitá v t.

Nechť funkce f po částech hladká na symetrickým intervalu $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$. Potom:

- Je-li f **sudá** funkce, pak

$$b_n = 0, \qquad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t \ \mathrm{d}t, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

  a Fourierův rozvoj funkce se redukuje na **kosinovou řadu.**

- Je-li f **lichá** funkce, pak

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t \ \mathrm{d}t, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

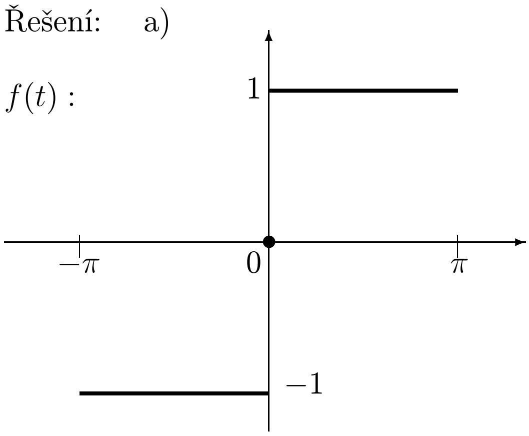
  a Fourierův rozvoj funkce se redukuje na **sinovou řadu.**

Příklad 7.1.1. *Najděte Fourierovu řadu funkce $f(t)$ na daném intervalu*

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \pi\rangle \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t \in \langle -\pi, 0) \end{cases}$ *b)* $f(t) = |t|; \quad t \in \langle -1, 1\rangle$

c) $f(t) = t^2; \quad t \in \langle -\pi, \pi\rangle$ *d)* $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle -\pi, 0) \\ t, & t \in \langle 0, \pi\rangle \end{cases}$

Řešení: a)



Nejdříve jsme nakreslili graf funkce. Z obrázku vidíme, že funkce je po částech spojitá na $\langle -\pi, \pi\rangle$ a je lichá. Potom $a_n = 0$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, $T = 2\pi$ a

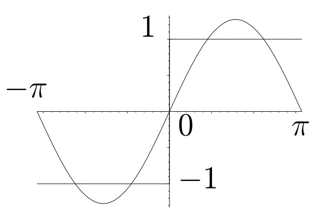
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

Koeficienty b_n spočítáme podle vzorce: $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t =$

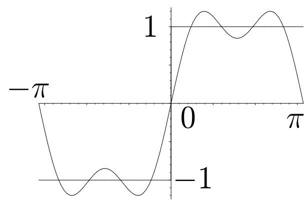
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, \mathrm{d}t = \frac{2}{n\pi} \left[-\cos nt \right]_0^{\pi} = \frac{-2\cos n\pi + 2}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{4}{n\pi} & \text{pro } n = 2k-1. \end{cases}$$

$$\underline{\underline{f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)t = \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t + \dots}}$$

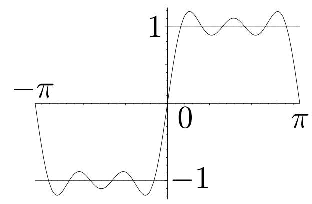
Do následujících obrázků jsme nakreslili grafy funkce $f(t)$ a součtů S_N prvních N členů jeho Fourierovy řady ($N = 1, 3, 5$).



$f(t)$ a $S_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$



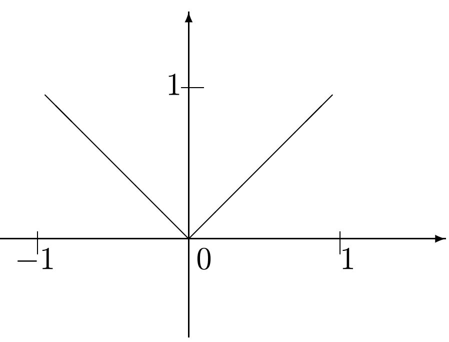
$f(t)$ a $S_3(t) =$
$= \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t$



$f(t)$ a $S_5(t) =$
$\frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t$

b)

$f(t)$:



Funkce $f(t) = |t|$ je spojitá na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a je sudá. Potom $b_n = 0$.

Perioda funkce $T = 2$ a $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Koeficienty a_n spočítáme podle vzorce: $a_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t) \, \mathrm{d}t = 2 \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = 1,$

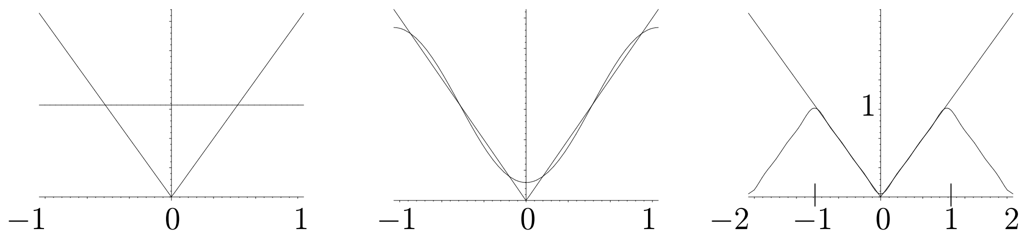
$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t) \cos n\pi t \, \mathrm{d}t = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, \mathrm{d}t = [\text{ metoda per partes}]$$

$$= 2 \left[\frac{t \sin n\pi t}{n\pi} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin n\pi t}{\pi n} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi^2 n^2} \left[\cos n\pi t \right]_0^1 = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{-4}{\pi^2 n^2} & \text{pro } n = 2k-1, \end{cases}$$

Dosadíme do vzorce pro Fourierovou řadu a dostaneme, že pro $t \in \langle -1, 1 \rangle$

$$|t| = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{\pi^2(2k-1)^2} \cos(2k-1)\pi t \right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi t - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi t - \dots .$$

Znovu jsme nakreslili funkci $f(t)$ a částečné součty její Fourierovy řady.



$f(t)$ a $S_0(t) = \frac{1}{2}$ $f(t)$ a $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi t$ $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi t - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi t$

Do posledního obrázku jsme nakreslili funkce $|t|$ a S_3 na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$. Je tady dobře vidět, ze Fourierova řada funkce je periodická funkce a aproximuje $|t|$ pouze na $\langle -1, 1 \rangle$.

c) Funkce $f(t) = t^2$ je spojitá na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a je sudá.
Potom $b_n = 0$ pro $n = 1, 2, \dots$, $T = 2\pi$, $\omega = 1$ a koeficienty a_n spočítáme:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos nt\,\mathrm{d}t = [\text{ metoda per partes}]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2 \sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2t\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} t \sin nt\,\mathrm{d}t = [\text{per partes}]$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left[t\cos nt\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi \cos n\pi}{\pi n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Dostali jsme, že pro $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nt\right) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos t + \cos 2t - \frac{4}{9}\cos 3t + \dots .$$

d) Funkce $f(t)$ je spojitá a není sudá ani lichá.

$T = 2\pi$ a $\omega = 1$. Koeficienty spočítáme podle vzorců:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t = [\text{ metoda per partes}]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi n^2}\left[\cos nt\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{pro } n = 2k-1. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}t = [\text{ metoda per partes}]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-t\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nt}{n}\,\mathrm{d}t = \frac{-\cos n\pi}{n} = \begin{cases} \frac{-1}{n} & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{1}{n} & \text{pro } n = 2k-1. \end{cases}$$

Dosadíme do vzorce pro Fourierovu řadu a dostaneme, že pro $t \in \langle -\pi, \pi\rangle$

$$\underline{\underline{f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nt + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt\right)}}.$$

Příklad 7.1.2. *Najděte Fourierovu řadu funkce $f(t)$ na daném intervalu*

a) $f(t) = t; \quad t \in \langle -\pi, \pi\rangle$

b) $f(t) = |t| - 1; \quad t \in \langle -1, 1\rangle$

c) $f(t) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{t^2}{4}; \quad t \in \langle -\pi, \pi\rangle$

d) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle -\pi, 0) \\ 1, & t \in (0, \pi\rangle \end{cases}$

Řešení: a) $f(t) = -2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nt;$

b) $f(t) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi t;$

c) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nt\right);$

d) $f(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t.$

Příklad 7.1.3. *Pro funkci* $f(t) = 1 - t, \quad t \in \langle 0, 2\rangle$ *spočítejte*

a) její rozvoj v kosinovou řadu *b) její rozvoj v sinovou řadu.*

Řešení: a) Funkci $f(t) = 1 - t$ rozšíříme na $f^*(t)$ tak, abychom dostali na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ sudou funkci, a spočítáme Fourierovu řadu této funkce. Potom $b_n = 0$, perioda funkce $T = 2 - (-2) = 4$ a $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Koeficienty a_n spočítáme podle vzorce: $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2} f^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 1 - t\,\mathrm{d}t = 0$,

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f^*(t)\cos\frac{n\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (1-t)\cos\frac{n\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = [\text{ metoda per partes}]$$
$$= \left[\frac{2(1-t)}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2}\right]_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \sin\frac{n\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_0^2 =$$
$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k, \\ \frac{8}{\pi^2 n^2} & \text{pro } n = 2k-1. \end{cases}$$

Dostali jsme kosinovou Fourierovu řadu funkce pro $t \in \langle 0, 2\rangle$

$$1 - t = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi t}{2}\right) = \frac{8}{\pi^2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{8}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi t}{2} + \dots}}.$$

b) Funkci $f(t) = 1 - t$ rozšíříme na $f^{**}(t)$ tak, abychom dostali na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ lichou funkci, a spočítáme Fourierovu řadu této funkce. Potom $a_n = 0$, perioda funkce $T = 2 - (-2) = 4$ a $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f^{**}(t)\sin\frac{n\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (1-t)\sin\frac{n\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = [\text{ metoda per partes}]$$
$$= \left[\frac{-2(1-t)}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_0^2 - \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \cos\frac{n\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi n}\left((-1)^n + 1\right) - 0 =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k-1, \\ \frac{4}{\pi n} & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$

Dostali jsme sinovou Fourierovu řadu funkce pro $t \in \langle 0, 2\rangle$:

$$1 - t = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{2k\pi}\sin\frac{2k\pi t}{2}\right) = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k\pi}\sin k\pi t\right) = \frac{2}{\pi}\sin\pi t + \frac{1}{\pi}\sin 2\pi t + \dots}}.$$

Příklad 7.1.4. *Najděte kosinovou Fourierovu řadu funkce $f(t)$*

a) $f(t) = 1 + t;\quad t \in \langle 0, \pi \rangle$ *b)* $f(t) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{t}{2};\quad t \in \langle 0, \pi \rangle$

c) $f(t) = t^2;\quad t \in \langle 0, \pi \rangle$ *d)* $f(t) = t^3;\quad t \in \langle 0, \pi \rangle$

Řešení: a) $f(t) = 1 + \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)t$

b) $f(t) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2};$ c) $f(t) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt;$

d) $f(t) = \dfrac{\pi^3}{4} + 6\pi \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt.$

Příklad 7.1.5. *Najděte sinovou Fourierovu řadu funkce $f(t)$*

a) $f(t) = 1 + t;\quad t \in \langle 0, \pi \rangle$ *b)* $f(t) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{t}{2};\quad t \in \langle 0, \pi \rangle$

c) $f(t) = t^2;\quad t \in \langle 0, \pi \rangle$ *d)* $f(t) = t^3;\quad t \in \langle 0, \pi \rangle$

Řešení: a) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n} + \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \right) \sin nt;$

b) $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{2n};$

c) $f(t) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^3}[(-1)^n - 1] \right) \sin nt;$

d) $f(t) = 2\pi^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} + 12 \frac{(-1)^n}{n^3} \right) \sin nt.$

STUDIJNÍ JEDNOTKA

Z - TRANSFORMACE

Cíle studijní jednotky. V této části se seznámíte se Z-transformací komplexní posloupností. Uvedeme tabulku, která usnadní hledání obrazů mnoha posloupnosti. Pro zpětnou Z-transformací uvedeme pouze metodu, která využívá reziduovou větu. V poslední části je uvedená aplikace Z-transformace na řešení diferenčních rovnic.

8 Z-transformace

8.1 Definice a vlastnosti Z-transformace

Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ je komplexní posloupnost. Definujeme funkci $F(z)$ jako součet řady

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\ z^{-n} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots$$

a nazýváme jí **Z-transformace posloupnosti** $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Značíme $\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z)$.

Vlastnosti Z-transformace:

1. Řada $\mathcal{Z}\{f(n)\}$ konverguje pro $|z| > R$, kde $R = \overline{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f(n)|}$.
2. Řada se dá derivovat a integrovat člen po členu pro $|z| > R$.
3. $F(z)$ je holomorfní pro $|z| > R$.
4. Z-transformace je lineární, tj.
$$\mathcal{Z}\{a\, f(n) + b\, g(n)\} = a\, \mathcal{Z}\{f(n)\} + b\, \mathcal{Z}\{g(n)\}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Příklad 8.1.1. *Určete obraz posloupnosti* $f(n) = 1$ *pro* $n = 0, 1, 2, \dots$

Řešení: Podle definice

$$\mathcal{Z}\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \underline{\underline{\frac{z}{z-1}}}.$$

Tato řada konverguje pro $|\frac{1}{z}| < 1$, tedy pro $|z| > 1$.

Pro určení obrazů některých vybraných posloupností můžeme použít následující tabulku:

Číslo vzorce	$f(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	$\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$
1.	1	$\frac{z}{z-1}$
2.	a^n	$\frac{z}{z-a}$
3.	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4.	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5.	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
6.	$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
7.	$\cos \omega n$	$\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$
8.	$\sin \omega n$	$\frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$
9.	$\delta_0(n)$	1
10.	$\delta_m(n)$	z^{-m}
11.	$f(n+1)$	$zF(z) - zf(0)$
12.	$f(n+2)$	$z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)$
13.	$f(n+k)$	$z^kF(z) - \Sigma_{j=0}^{k-1} f(j) z^{k-j}$
14.	$f(n-k)$	$z^{-k}F(z)$

Základní slovník a gramatika Z-transformace

8.2 Zpětná Z-transformace

Zobrazení, které každému obrazu $F(z)$ přiřazuje jeho předmět $f(n)$ se nazývá **zpětná Z-transformace** a značí se symbolem $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$.

Při hledání předmětu použijeme následující vzorec.

Nechť funkce $F(z)$ je holomorfní kromě konečného počtu svých singulárních bodů a $\lim\limits_{z\to\infty} F(z)$ je konečná, pak pro zpětnou Z-transformaci $F(z)$ platí vzorec

$$\boxed{f(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \sum_{z_k} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[F(z)\, z^{n-1} \right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

kde z_k jsou póly funkce $F(z)z^{n-1}$.

Příklad 8.2.1. *Najděte vzory daných obrazů* $F(z)$

a) $F(z) = \dfrac{z}{1+z}$ *b)* $F(z) = \dfrac{1}{z-2}$ *c)* $F(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$

d) $F(z) = \dfrac{z}{z-3}$ *e)* $F(z) = \dfrac{2z}{(z-1)^2}$ *f)* $F(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z+1)}$

Řešení: a) Při hledání vzoru nejdřív najděme póly funkce $F(z)\, z^{n-1} = \dfrac{z^n}{1+z}$.
Tato funkce má v bodě $z_1 = -1$ pól prvního řádu. Pak pro $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \operatorname*{res}_{z=-1} \left[\frac{z^n}{1+z} \right] = \lim_{z\to-1} \left((z+1)\frac{z^n}{1+z} \right) = (-1)^n.$$

Dostali jsme tedy, že $\mathcal{Z}^{-1}\left\{ \dfrac{z}{1+z} \right\} = \{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty} = \underline{\underline{(1, -1, 1, -1, \ldots)}}$.

b) $n = 0:$ Funkce $F(z)\, z^{-1} = \dfrac{1}{z(z-2)}$ má póly prvního řádu v bodech $z_1 = 0$ a $z_2 = 2$. Můžeme spočítat

$$f(0) = \operatorname*{res}_{z=0} \left[\frac{1}{z(z-2)} \right] + \operatorname*{res}_{z=2} \left[\frac{1}{z(z-2)} \right] = \lim_{z\to0} \frac{1}{z-2} + \lim_{z\to2} \frac{1}{z} = 0.$$

Pro $n = 1, 2, \ldots$ funkce $F(z)\, z^{n-1} = \dfrac{z^{n-1}}{z-2}$ má pól prvního řádu pouze v bodě $z_1 = 2$.

Potom $f(n) = \operatorname*{res}_{z=2} \left[\dfrac{z^{n-1}}{z-2} \right] = \lim\limits_{z\to2} \left((z-2)\dfrac{z^{n-1}}{z-2} \right) = 2^{n-1}$.

Vzorem funkce $F(z)$ je posloupnost $\underline{\underline{\{f(n)\}_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 2, 4, 8, \ldots)}}$

c) $n = 0$: $F(z)\, z^{-1} = \dfrac{1}{z^2(z-1)^2}$ má v bodech $z_1 = 0$ a $z_2 = 1$ póly druhého řádu. Spočítáme

$$f(0) = \operatorname*{res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2(z-1)^2}\right] + \operatorname*{res}_{z=1} \left[\frac{1}{z^2(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)' + \lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{z^2}\right)'$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2}{(z-1)^3} + \lim_{z\to 1} \frac{-2}{z^3} = 2 - 2 = 0.$$

$n = 1$: $F(z)\, z^0 = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$ má v bodě $z_1 = 0$ pól prvního řádu a v bodě $z_2 = 1$ pól druhého řádu. Potom

$$f(1) = \operatorname*{res}_{z=0} \left[\frac{1}{z(z-1)^2}\right] + \operatorname*{res}_{z=1} \left[\frac{1}{z(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-1)^2} + \lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{z}\right)'$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

$n = 2, 3, \ldots$: $F(z)\, z^{n-1} = \dfrac{z^{n-2}}{(z-1)^2}$ má pouze pól druheho řádu v bodě $z_1 = 1$.

Potom $f(n) = \operatorname*{res}_{z=1} \left[\dfrac{z^{n-2}}{(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1} \left(z^{n-2}\right)' = (n-2) \cdot 1^{n-3} = n - 2.$

Vzorem funkce $F(z)$ je posloupnost $\underline{\underline{\{f(n)\}_{n=0}^{\infty} = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)}}$

d) $f(n) = 3^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$ e) $f(n) = 2\, n\, 5^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

f) $f(0) = 0,\ f(n) = (-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

8.3 Řešení diferenčních rovnic pomocí Z-transformace

Lineární diferenční rovnice k-tého řádu — rovnice, která má tvar

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + \ldots + a_k y(n) = g(n), \quad a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}.$$

Počáteční podmínky diferenční rovnice — podmínky, tvaru

$$y(0) = c_0,\ y(1) = c_1, \ldots\ y(k-1) = c_{k-1}, \quad c_0, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{C}.$$

Řešení diferenční rovnice k-tého řádu — komplexní posloupnost $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$, která vyhovuje dané rovnici a splňuje dané počáteční podmínky.

Metoda řešení diferenční rovnice Z-transformací je podobná metodě řešení diferenciálních rovnic Laplaceovou transformaci: Celou diferenční rovnici včetně pravé strany přetransformuje pomocí Z-transformace, ze vzniklé rovnice vyjádříme $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}$ a výsledek získáme pomocí zpětné Z-transformace.

Příklad 8.3.1. *Z-transformací řešte následující diferenční rovnice*

a) $y(n+2) - 3y(n+1) - 10y(n) = 0, \;\; y(0) = 0, \; y(1) = 2$

b) $y(n+2) + y(n) = 0, \;\; y(0) = 0, \; y(1) = 1$

c) $y(n+2) + y(n+1) - 2y(n) = 1, \;\; y(0) = 0, \; y(1) = 0$

d) $y(n+1) - y(n) = 2^n(n-1), \;\; y(0) = 0$

e) $y(n+2) - 4y(n+1) + 4y(n) = 0, \;\; y(0) = 1, \; y(1) = 4$

f) $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 1, \;\; y(0) = 0, \; y(1) = 0$

g) $y(n+2) - 9y(n) = 0, \;\; y(0) = 0, \; y(1) = 1$

h) $y(n+2) - 5y(n+1) + 4y(n) = 2^n, \;\; y(0) = 0, \; y(1) = 0$

i) $y(n+1) - 3y(n) = n(-1)^n, \;\; y(0) = 1$

Řešení: a) Podle tabulky přetransformujeme celou rovnici.
$\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n+1)\} = zY(z) - 0 \cdot z = zY(z);$
$\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2Y(z) - 0 \cdot z^2 - 2z = z^2Y(z) - 2z;$
Dostali jsme rovnici pro $Y(z)$: $z^2Y(z) - 2z - 3zY(z) - 10Y(z) = 0.$
Z toho $Y(z) = \dfrac{2z}{(z-5)(z+2)}$, a zpětnou transformací získáme

$$\underline{\underline{y(n) = \frac{2}{7}\,5^n - \frac{2}{7}\,(-2)^n,}} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

b) $\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2Y(z) - z;$
Rovnice pro $Y(z)$ je $z^2Y(z) - z + Y(z) = 0$, a z toho $Y(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

Funkce $Y(z)\, z^{n-1} = \dfrac{z^n}{z^2+1}$ má v bodech $z_1 = \mathrm{j}$ a $z_2 = -\mathrm{j}$ póly prvního řádu.

Pro $n = 0, 1, \ldots$: $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \operatorname*{res}_{z=\mathrm{j}} \left[\dfrac{z^n}{z^2+1}\right] + \operatorname*{res}_{z=-\mathrm{j}} \left[\dfrac{z^n}{z^2+1}\right] =$

$$\lim_{z\to \mathrm{j}} \frac{z^n}{z+\mathrm{j}} + \lim_{z\to -\mathrm{j}} \frac{z^n}{z-\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}^{\,n}}{2\mathrm{j}} + \frac{(-\mathrm{j}\,)^n}{-2\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}^{\,n-1}}{2} + \frac{(-\mathrm{j}\,)^{n-1}}{2} = \mathrm{j}^{\,n-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\right).$$

Řešením diferenční rovnice je posloupnost $\underline{\underline{\{y(n)\}_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots)}}$.

c) $\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n+1)\} = zY(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2Y(z);$

Rovnice pro $Y(z)$ je $z^2Y(z) + zY(z) - 2Y(z) = \dfrac{z}{z-1}$ a $Y(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+2)}$.

Funkce $Y(z)\ z^{n-1} = \dfrac{z^n}{(z-1)^2(z+2)}$ má v bodě $z_1 = -2$ pól prvního řádu a v bodě $z_2 = 1$ pól druhého řádu.

Pro $n = 0, 1, 2, \ldots :\ y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \operatorname*{res}_{z=-2} \left[\dfrac{z^n}{(z-1)^2(z+2)} \right] +$

$$+ \operatorname*{res}_{z=1} \left[\frac{z^n}{(z-1)^2(z+2)} \right] = \lim_{z\to -2} \frac{z^n}{(z-1)^2} + \lim_{z\to 1} \left(\frac{z^n}{z+2} \right)' =$$

$$= \frac{1}{9}(-2)^n + \lim_{z\to 1} \left(\frac{nz^{n-1}(z+2) - z^n}{(z+2)^2} \right) = \frac{1}{9}(-2)^n + \frac{3n-1}{9} = \underline{\underline{\frac{(-2)^n + 3n - 1}{9}}}.$$

d) $\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2 Y(z);\quad \mathcal{Z}\{n2^n)\} = \dfrac{2z}{(z-2)^2};\quad \mathcal{Z}\{2^n)\} = \dfrac{z}{z-2};$

Rovnice pro $Y(z)$ je $Y(z)(z-1) = \dfrac{2z}{(z-2)^2} - \dfrac{z}{z-2} = \dfrac{2z - z^2 + 2z}{(z-2)^2}.$

Z toho $Y(z) = \dfrac{4z - z^2}{(z-2)^2(z-1)}$, a $Y(z)\ z^{n-1} = \dfrac{z^n(4-z)}{(z-2)^2(z-1)}.$

Tato funkce má v $z_1 = 1$ pól prvního řádu a v bodě $z_2 = 2$ pól druhého řádu.

Pro $n = 0, 1, 2, \ldots :\ y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \operatorname*{res}_{z=1} \left[\dfrac{z^n(4-z)}{(z-2)^2(z-1)} \right] +$

$$+ \operatorname*{res}_{z=2} \left[\frac{z^n(4-z)}{(z-2)^2(z-1)} \right] = \lim_{z\to 1} \frac{z^n(4-z)}{(z-2)^2} + \lim_{z\to 2} \left(\frac{z^n(4-z)}{z-1} \right)' =$$

$$= 3 + \lim_{z\to 2} \frac{(nz^{n-1}(4-z) - z^n)(z-1) - z^n(4-z)}{(z-1)^2} = 3 + \frac{2n2^{n-1} - 2^n - 2\cdot 2^n}{1} =$$

$$= \underline{\underline{3 + 2^n(n-3)}}.$$

e) $\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z);\quad \mathcal{Z}\{y(n+1)\} = zY(z) - z;$

$\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2 Y(z) - z^2 - 4z.$

Po dosazení do rovnice a po úpravě dostaneme $Y(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)^2}.$

Funkce $Y(z)\ z^{n-1} = \dfrac{z^{n+1}}{(z-2)^2}$ má v bodě $z_1 = 2$ pól druhého řádu.

Pro $n = 0, 1, 2, \dots :$ $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \operatorname*{res}_{z=2} \left[\dfrac{z^{n+1}}{(z-2)^2} \right] = \lim_{z\to 2} \left(z^{n+1}\right)' =$

$= \lim_{z\to 2} (n+1)\ z^n = \underline{\underline{(n+1)\ 2^n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$

f) $y(n) = \dfrac{1}{2}(3^n + 1) - 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots ;$

g) $y(n) = \dfrac{1}{2}3^{n-1} + \dfrac{1}{2}(-3)^{n-1} = \dfrac{3^{n-1}}{2}(1 + (-1)^{n-1}), \quad n = 0, 1, 2 \dots ;$

h) $y(n) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}4^{n-1} - 2^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2 \dots ;$

i) $y(n) = \dfrac{1}{16}\left[5 \cdot 3^{n+1} + (4n-1)(-1)^{n+1}\right], \quad n = 0, 1, 2 \dots .$

Literatura

[1] Eliaš, J., Horváth J., Kajan J., Škulka R.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 4. Bratislava, Nakladateľstvo Alfa, 1970.

[2] Haluzíková, A., Knéslová I., Kudláček V.: Aplikovaná matematika III. Brno, SNTL-Praha, 1972.

[3] Chrastinová, M., Kolouchová V., Krupková V., Švarc, S.: Matematická analýza I. Brno, Ediční středisko VUT, 1978.

[4] Koukal, S.: Laplaceova transformace. Brno, Ediční středisko VUT, 1979.

[5] Mašek, J.: Sbírka úloh z vyšší matematiky. Plzeň, Ediční středisko VŠSE, 1965.

[6] Novák, V.: Řešené úlohy z matematiky III. Praha, SNTL, 1966.

[7] Voráček, J., Zapletal J., Zástěra B.: Matematická analýza III. Praha, SNTL, 1984.