Tutoriál č. 1

0.1 Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Obyčejnou diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které se vyskytují derivace nebo diferenciály neznámé funkce (případně více neznámých funkcí) jedné reálné proměnné. Obyčejné diferenciální rovnice jsou například

$$x^2y' + y = \sqrt{x}$$
$$y''' + 2y' + y = x$$

Řešením diferenciální rovnice na intervalu I rozumíme funkci f takovou, že po dosazení za neznámou funkci, dostaneme identitu.

Snadno výpočtem ověříme, že rovnice $xy' + y = \cos x$ má na libovolném intervalu, který neobsahuje 0 řešení $y = -\frac{\sin x}{x}$. Tato konkrétní funkce je tzv. **partikulární řešení**. **Obecné řešení** této rovnice je $y = \frac{1}{x}(c - \sin x)$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

0.2 Některé typy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

0.2.1 Exaktní rovnice a integrační faktor

Exaktní rovnice souvisí s totálním diferenciálem funkce dvou proměnných. Nechť má funkce $z = f(x, y)$ spojité parciální derivace prvního řádu v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pak má v Ω **totální diferenciál**, který je roven

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Definice 0.1 (Exaktní rovnice)**.**
Diferenciální rovnice

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

se nazývá **exaktní diferenciální rovnice**, jestliže výraz na její levé straně je totálním diferenciálem nějaké funkce f v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Funkci f nazýváme **kmenovou funkcí**.

To že je nějaká rovnice exaktní poznáme, pomocí Schwartzovi věty o záměněně derivování:

Věta 0.2. *Nechť M a N jsou funkce dvou proměnných, které jsou spojité a mají spojité parciální derivace prvního řádu v nějaké oblasti R. Pak výraz*

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce f právě tehdy, když v uvedené oblasti platí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{3}$$

Potom je řešení této rovnice dáno implicitně rovnicí

$$f(x,y) = C, \tag{4}$$

kde C je libovolná konstanta.

Nalezení kmenové funkce f z jejích parciálních derivací je úloha probíraná již v předmětu BMA2, kde bylo ukázáno několik možností jejího nalezení. Hledáme funkci f, pro kterou platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y).$$

Integrací M podle x můžeme (tj. y pro tento moment považujeme za konstantu) f najít:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y),$$

kde $g(y)$ je funkce závislá pouze na y, která zde hraje roli integrační konstanty. Tuto můžeme určit z rovnice, že derivace f podle y má být rovna $N(x,y)$. To znamená, že

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g'(y) = N(x,y).$$

Odtud dostaneme rovnici

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\,, \tag{5}$$

ze které zatím neznámou funkci g najdeme integrací podle y. Tím je kmenová funkce f nalezena.

Poznámka 0.3. Celý postup hledání f lze provést i v opačném pořadí. Případně můžeme funkci f určit jako jakési množinové sjednocení integrálů

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x \cup \int N(x,y)\,\mathrm{d}y),$$

čímž je míněn součet kde je každá funkce napsaná pouze jednou.

Příklad 1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(y^2 + 2x)\,\mathrm{d}x + 2(x+1)y\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Ověříme, že zadaná rovnice je exaktní.

$$\frac{\partial\ y^2 + 2x}{\partial y} = 2y = \frac{\partial\ 2(x+1)y}{\partial x}.$$

Existuje proto funkce f, pro niž platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2x \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+1)y.$$

Integrací prvního vztahu podle x dostáváme

$$f(x,y) = xy^2 + x^2 + g(y).$$

Funkci $g(y)$ určíme z rovnosti parciálních derivací podle y:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + 2x^2 + g(y)) = 2xy + g'(y) = 2(x+1)y \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad g(y) = y^2.$$

Kmenová funkce f je tedy $f(x,y) = xy^2 + x^2 + y^2$ a obecné řešení zadané diferenciální rovnice je $xy^2 + x^2 + y^2 = C$. V tomto případě můžeme řešení vyjádři i v explicitním tvaru

$$y = \pm\sqrt{\frac{C - x^2}{x}}.$$

$\square$

Integrační faktor

Uvažujme úpravu exaktní rovnice

$$3x^2y\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y = 0.$$

„Vydělením x^2 se přece zjednoduší!“, což je pravda, ale z exaktní rovnice se stane rovnice, která není exaktní:

$$3y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$$

Rovnice je skutečně na pohled jednodušší, ale zato přestala být exaktní,neboť platí:

$$M(x,y) = 3y, \quad N(x,y) = x, \quad \text{a tedy} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

tato skutečnost nás vede k otázce zda naopak lze rovnici, která není exaktní, vynásobit vhodnou funkcí tak, že se z ní stane rovnice exaktní. Tuto označíme jako $\mu(x,y)$ a budeme jí říkat **integrační faktor**.

Obecně nalézt takovouto funkci $\mu(x,y)$, pro kterou by rovnice

$$\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

byla exaktní, tj. pro kterou by platilo $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)$ je obtížnější úloha než počáteční, nebo´T je třeba vyřešit parciální diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{6}$$

Integrační faktor jako funkce jedné proměnné

Pokud předpokládáme, že funkce μ závisí pouze na jedné proměnné, rovnice (6) se zredukuje na řešitelný tvar. Nejprve hledejme funkci závislou pouze na proměnné x, tj. $\mu = \mu(x)$. V tomto případě je $\mu'_y = 0$ a z (6) dostaneme

$$\mu(x)\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \mu'(x)\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad \mu'(x)\cdot N = \mu(x)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,.$$

Aby tato rovnost mohla být splněna, musí výraz na pravé straně záviset také pouze na x, tedy

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \alpha(x)\,.$$

Tím se rovnice (6) značně zjednodušila na rovnice se separovanými proměnnými:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \alpha(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \alpha(x)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|\mu| = \int \alpha(x)\,\mathrm{d}x + c \quad \Rightarrow \quad \mu = c \cdot \mathrm{e}^{\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Protože nám jde o nalezení jedné konkrétní funkce μ, nikoli všech možných, můžeme konstantu c zvolit, např. $c = 1$. Tím máme

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Podobně by se postupovalo při hledání integračního faktoru μ jehož argument by mohla funkce proměnných x, y (např. $x + y$, xy). V následující větě je popsána situace pro integrační faktor jako závislé pouze na proměnné x nebo y.

Věta 0.4. *Nechť je dána rovnice*

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Je-li $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \alpha(x)$, *resp.* $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \beta(y)$, *pak vynásobením rovnice* (0.4) *integračním faktorem* $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x}$, *resp.* $\mu(y) = \mathrm{e}^{\int \beta(y)\,\mathrm{d}y}$, *dostaneme rovnici exaktní.*

Příklad 2. Najděte obecné řešení rovnice

$$(2x^2 + y^2 + 3)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0$$

Řešení. Máme $\quad M(x,y) = 2x^2 + y^2 + 3, \quad N(x,y) = xy.$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{rovnice není exaktní.}$$

Zkusíme, jestli se nám podaří najít integrační faktor μ jako funkci pouze proměnné x:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{x}.$$

Toto je funkce proměnné x a v tomto případě je $\alpha(x) = 1/x$ tedy

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\ln x} = x.$$

Zadanou rovnici nalezeným integračním faktorem vynásobíme:

$$(2x^3 + xy^2 + 3x)\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y = 0$$

Najdeme kmenovou funkci f.

$$f(x,y) = \int x^2y\,\mathrm{d}y = \frac{x^2y^2}{2} + h(x).$$

Funkci $h(x)$ určíme z rovnosti parciálních derivací podle x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2y^2}{2} + h'(x) = xy^2 + h'(x) = 2x^3 + xy^2 + 3x \Rightarrow h'(x) = 2x^3 + 3x \Rightarrow h(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{2}.$$

Kmenová funkce je tedy

$$f(x,y) = \frac{x^4 + x^2y^2 + 3x^2}{2}$$

a obecné řešení dané rovnice je zadáno implicitně rovnicí

$$\underline{\underline{x^4 + x^2y^2 + 3x^2 = c.}}$$

□

Dále se seznámíme s některými vybranými typy diferenciálních rovnic, jmenovitě s rovnicí Bernoulliovou, Riccatiovou a Clairoutovou, a předvedeme řešení diferenciálních rovnic pomocí Picardovy metody postupných aproximací.

0.2.2 Bernoulliova rovnice

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \tag{7}$$

kde $n \in \mathbb{R}$, se nazývá **Bernoulliova rovnice**. Tuto rovnici můžeme chápat jako zobecnění lineární diferenciální rovnici ($n = 0$). Za pozornost stojí fakt, že pro $n > 0$ má rovnice vždy tzv. triviální řešení $y = 0$. Rovnici (7) můžeme řešit různými metodami. Lze např. použít substituci za y^{1-n}, kdy danou rovnici transformujeme na rovnici lineární. Ukážeme i jiný způsob, který kopíruje postup řešení lineární rovnice.

- Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici
$$y' = a(x)y. \tag{8}$$
Obecné řešení této rovnice vyjde ve tvaru $y = C \cdot y_0(x)$.

- Řešení původní rovnice (7) pak budeme hledat ve tvaru
$$y = C(x) \cdot y_0(x).$$
Toto je modifikace metody variace konstant, používané při řešení lineárních diferenciálních rovnic. Opravdu se podaří najít funkci $C(x)$, pro kterou je $y = C(x) \cdot y_0(x)$ řešením zadané rovnice. Dosadíme předpokládané řešení do rovnice (7):
$$C'(x) \cdot y_0(x) + C(x) \cdot y_0'(x) = a(x) \cdot C(x) \cdot y_0(x) + b(x) \cdot C^n(x) \cdot y_0^n(x). \tag{9}$$
Protože $y_0(x)$ je řešením rovnice (8), a tedy platí $y_0'(x) = a(x) \cdot y_0(x)$. Druhý člen na levé straně rovnice (9) je proto roven prvnímu členu na pravé straně a z rovnice nakonec zbude
$$C'(x) = b(x) \cdot C^n(x) \cdot y_0^{n-1}(x),$$
což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $C(x)$.

Příklad 3. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = -\frac{y}{x} + x^3y^4$$

Řešení. Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici $y' = -\dfrac{y}{x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{c}{|x|} \quad \Rightarrow \quad y = C\cdot\frac{1}{x}\,.$$

Řešení zadané rovnice budeme hledat jako $y = C(x)\cdot\dfrac{1}{x}$:

$$C'\cdot\frac{1}{x} + C\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{C\cdot\frac{1}{x}}{x} + x^3\cdot C^4\frac{1}{x^4} \quad \Rightarrow \quad C' = C^4.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou nyní vyřešíme.

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = C^4 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{\mathrm{d}C}{C^4} = \int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3C^3} = x + k \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{\sqrt[3]{3(x+k)}}\,.$$

Obecné řešení naší rovnice je tedy

$$y = -\frac{1}{x\sqrt[3]{3(x+k)}}\,.$$

Navíc má rovnice ještě singulární řešení $y = 0$, které nelze dosáhnou volbou konstanty k. $\square$

Poznámka 0.5. U exaktních diferenciálních rovnic byly obě proměnné x a y ve stejné pozici. Inspirováni touto myšlenkou je možné v některých případech pouhou záměnou závislosti proměnných, tj. místo funkce $y(x)$ hledat funkci $x(y)$ rovnici převést na známý typ. Například rovnice

$$(2x^2 y \ln y - x)y' = y$$

přejde při této záměně, jejíž součástí je i záměna

$$y' = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}} = \frac{1}{x'},$$

v rovnici

$$(2x^2 y \ln y - x) = yx',$$

která je rovnicí Bernoulli. Obecné řešení rovnice homogenní má tvar

$$x = \frac{C}{y}.$$

Aplikací metody variace konstanty dostáváme

$$2\frac{C^2}{y^2} y \ln y = y\left(\frac{C'}{y} - \frac{C}{y^2}\right) \Leftrightarrow \int 2\frac{\ln y}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}C}{C^2} \Leftrightarrow \ln^2 y + K = -\frac{1}{C}.$$

Celkově je možné získat řešení dané diferenciální rovnice v implicitním tvaru

$$xy(K - \ln y^2) = 1.$$

0.2.3 Riccatiova rovnice

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{10}$$

se nazývá **Riccatiova rovnice**.

Ze znalosti jedno řešení rovnice (10) (např. podaří-li se nám je nějak uhodnout) a použitím substituce

$$y = y_1 + u,$$

dostaneme pro novou proměnnou u rovnici

$$u' = (Q(x) + 2R(x)y_1)u + R(x)u^2. \tag{11}$$

což je pro neznámou funkci u Bernoulliova rovnice kde $n = 2$.

Příklad 4. Najděte obecné řešení rovnice

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0,$$

jestliže řešením této rovnice je funkce $y_1 = 1/x$.

Řešení. Zavedeme substituci
$$y = \frac{1}{x} + u,$$
po které získáme Bernoulliovu rovnici ve tvaru:
$$3\left(-\frac{1}{x^2} + u'\right) + \left(\frac{1}{x} + u\right)^2 + \frac{2}{x^2} = 3u' + \frac{2}{x}u + u^2 = 0,$$
Vzniklou Bernoulliovu rovnici řešíme tak, že nejdříve určíme obecné řešení lineární homogenní rovnice $3u' = -\dfrac{2}{3x}\,u$:
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int -\frac{2}{3x}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -\frac{2}{3}\ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \qquad u = \frac{C}{\sqrt[3]{x^2}}\,.$$
Řešení Bernoulliovy rovnice budeme hledat metodou variace konstanty $u = \dfrac{C(x)}{\sqrt[3]{x^2}}$. Zderivováním a dosazením do rovnice dostaneme
$$3\left(\frac{C'}{\sqrt[3]{x^2}} + C\frac{-2/3}{\sqrt[3]{x^5}}\right) + \frac{2}{x}\frac{C}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{C^2}{\sqrt[3]{x^4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}C}{C^2} = \int -\frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{C} = -\sqrt[3]{x} + K.$$

C máme ve tvaru $C = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x} + K}$ a dosazením do předpokládaného tvaru řešení získáme řešení Bernoulliho rovnice:

$$u = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}+K}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x + K\sqrt[3]{x^2}}.$$

Dalším řešení Bernoulliovy rovnice je singulární řešení $u = 0$.

Dosazením do transformačního vztahu nalezneme obecné řešení Riccatiho rovnice.

$$y = \frac{1}{x} + u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + K\sqrt[3]{x^2}}.$$

Můžete si všimnout, že ze zadání známé řešení $y_1 = 1/x$ z obecného řešení nedostaneme pro žádné K. Toto řešení odpovídá singulárnímu řešení $u = 0$. $\square$

0.2.4 Clairautova rovnice

Dosud probírané rovnice bylo možné převést na tzv, explicitní tvar $y' = f(x, y)$. Clairautova rovnice je příkladem diferenciální rovnice nerozřešené vzhledem derivaci y' a to konkrétně je to rovnice:

$$y = xy' + f(y'). \tag{12}$$

Řešení Clairautovy rovnice je známo a jsou to řešení dvou typů

1. řešeními Clairautovy rovnice jsou všechny přímky tvaru:

$$y = cx + f(c), \tag{13}$$

kde c je libovolná konstanta.

2. Rovnice (12) může mít ještě další řešení, které je vyjádřené parametricky:

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t). \tag{14}$$

Toto řešení je singulární, protože jestliže $f''(t) \neq 0$, proto řešení (14) nedostaneme z řešení (13) pro žádnou volbu konstanty c. Naopak každá přímka (14) má s tímto řešení společný jeden bod, který je proto singulární.

Příklad 5. Najděte řešení rovnice

$$y = xy' - \ln y'.$$

Řešení. V tomto příkladu je $f(y') = \ln y'$ proto je řešením každá přímka:

$$\underline{\underline{y = cx + \ln c}}, \quad c > 0.$$

Parametricky dané řešení (14) určíme ze vztahů $f(t) = -\ln t$, je $f'(t) = -1/t$,tedy další řešení zadané rovnice je

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = -\ln t - t \cdot \frac{-1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad y = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \ln x + 1.$$

□

Shrnutí

V tomto tutoriálu jsme nejprve připomněli, jak vypadá diferenciální rovnice, co je jejím řešením, jak může řešení vypadat a jaký je rozdíl mezi obecným a partikulárním řešením dané diferenciální rovnice. Dále jsme se věnovali tzv. exaktním rovnicím. Uvedli jsme podmínku exaktnosti a několik možností jak rovnici vyřešit. Nakonec jsme se zabývali problémem, jak rovnici, která původně exaktní není, na exaktní rovnici převést. V jednoduchých případech je možno tuto úpravu provést pomocí tzv. integračního faktoru.

Dále jsme řešili tři typy význačných diferenciálních rovnic: Bernoulliovu, Riccatiovu a Clairotovu. Nejdůležitější poznatky jsou:

1. Bernoulliho rovnice se řeší podobně jako rovnice lineární. Nejprve najdeme obecné řešení odpovídající homogenní rovnice a pomocí něj pak i řešení samotné Bernoulliho rovnice.

2. Známe-li jedno partikulární řešení y_1 Riccatiho rovnice, můžeme tuto rovnici pomocí substituce $y = y_1 + u$ převést na Bernoulliho rovnici.

3. Clairautova rovnice se svým tvarem odlišuje od všech zatím probraných typů rovnic. Její řešení však najdeme snadno. Jsou to všechny přímky tvaru $y = cx + f(c)$. Navíc existuje ještě řešení, které lze vyjádřit parametricky pomocí vztahů (14).

Cvičení

1. U každé rovnice rozhodněte, zda je exaktní. Pokud ano, najděte její obecné řešení

   a) $(2x-1)\,\mathrm{d}x + (3y+7)\,\mathrm{d}y = 0$

   b) $(\sin y - y\sin x)\,\mathrm{d}x + (\cos x + x\cos y - y)\,\mathrm{d}y = 0$

   c) $(x+y)(x-y)\,\mathrm{d}x + x(x-2y)\,\mathrm{d}y = 0$

   d) $\dfrac{2x}{y}\,\mathrm{d}x - \dfrac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y = 0$

   e) $(1-2x^2-2y)y' = 4x^3 + 4xy$

   f) $\left(1 + \ln x + \dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}x = (1+\ln x)\,\mathrm{d}y$

2. Najděte řešení počátečních úloh

   a) $(\mathrm{e}^x + y)\mathrm{d}x + (2 + x + y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0,\ y(0) = 1$

   b) $\dfrac{3y^2 - x^2}{y^5}\,y' + \dfrac{x}{2y^4} = 0,\ y(1) = 1$

3. Najděte hodnotu konstanty k, pro kterou bude zadaná rovnice exaktní

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)\,\mathrm{d}x + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,\mathrm{d}y = 0$$

4. Najděte integrační faktor, pomocí nějž lze zadanou rovnici převést na rovnici exaktní. Pak najděte obecné řešení rovnice.

   a) $6xy\,\mathrm{d}x + (4y + 9x^2)\,\mathrm{d}y = 0$

   b) $(xy + y^2 + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$

5. Najděte obecné řešení Bernoulliho rovnice

   a) $xy' + y = \dfrac{1}{y^2}$.

   b) $y' - y = \mathrm{e}^x y^2$, které vyhovuje podmínce $y(0) = 1$.

6. Najděte obecné řešení Riccatiho rovnice

   a) $y' = -2 - y + y^2$, víme-li, že jedno řešení této rovnice je $y_1 = 2$.

b) $y' = 2x^2 + \dfrac{1}{x}\, y - 2y^2$, víme-li, že jedno řešení této rovnice je $y_1 = x$.

7. Vyřešte Clairautovu rovnici

a) $y = xy' - (y')^3$. Najděte i singulární řešení.

b) $xy' - y = \mathrm{e}^{y'}$. Najděte i singulární řešení a partikulární řešení vyhovující podmínce $y(0) = -2$.

Výsledky

1. a) $x^2 - x + \dfrac{3}{2}\, y^2 + 7y = c$;

b) $x \sin y + y \cos x - \dfrac{1}{2}\, y^2 = c$;

c) není exaktní

d) $\dfrac{x^2}{y} = c$

e) $-x^4 - 2x^2 y + y - y^2 = c$;

f) není exaktní

2. a) $\mathrm{e}^x + xy + 2y + y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y = 3$;

b) $\dfrac{x^2}{4y^4} - \dfrac{3}{2y^2} = -\dfrac{5}{4}$

3. $k = 10$

4. a) $\mu(y) = y^2$, obecné řešení je $3x^2y^3 + y^4 = c$;
   b) $\mu(x) = \mathrm{e}^x$, obecné řešení je $xy\mathrm{e}^x + y^2\mathrm{e}^x = c$

5. Mezivýsledek: řešení odpovídající lineární rovnice je $y_0(x) = c/x$. Obecné řešení zadané rovnice je $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + c}}{x}$, což lze přepsat např. jako $y^3 = 1 + cx^{-3}$.

6. Mezivýsledky: řešení odpovídající lineární rovnice je $y_0(x) = c\mathrm{e}^x$, obecné řešení zadané rovnice je

$$y = -\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}/2 + c},$$

   což lze přepsat např. jako $y = -2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{2x} + k)^{-1}$.
   Řešení počáteční úlohy je

$$y = -\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 3}.$$

   ;

7. a) Mezivýsledek: Bernoulliho rovnice vzniklá substitucí $y = u + 2$ je $u' = 3u + u^2$. Obecné řešení zadané rovnice je

$$y = 2 - \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}/3 + c}$$

a lze ho přepsat např. jako

$$y = 2 - \frac{3\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x} + k}\,.$$

b) Mezivýsledek: Bernoulliho rovnice vzniklá substitucí $y = u + x$ je

$$u' = (\frac{1}{x} - 4x)u - 2u^2.$$

Obecné řešení zadané rovnice je

$$y = x - \frac{x\mathrm{e}^{-2x^2}}{\mathrm{e}^{-2x^2}/2 + c}\,.$$

8. a) $y = cx - c^3$; singulární řešení vyjádřené parametricky je $x = 3t^2, y = 2t^3$, odtud $y = 2\sqrt{\frac{x^3}{27}}\,.$

b) $y = cx - \mathrm{e}^c$; singulární řešení vyjádřené parametricky je $x = \mathrm{e}^t, y = -\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t$, odtud $y = -x + x\ln x$. Řešení počáteční úlohy je $y = x\ln 2 - 2$.