1 Tutoriál č. 4

Exponenciála matice a její užití

řešení Cauchyovy úlohy pro lineární systémy užitím fundamentálních matic.

Užití mocninných řad pro rovnice druhého řádu

1.1 Exponenciála matice a její užití

1.1.1 Definice exponenciály matice

V této části definujeme pojem takzvané exponenciály matice, který je motivován rozvojem exponenciální funkce do Mac'laurinovy řady a pro všechny hodnoty $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{1}{1!} \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot t^n + \cdots .$$

Definice 1.1. Pro $n \times n$ matici $B(t)$ definujme *exponenciálu matice* jako novou $n \times n$ matici pomocí řady

$$\mathrm{e}^{B(t)} := \exp[B(t)] = E + \frac{1}{1!} B(t) + \frac{1}{2!} B^2(t) + \cdots + \frac{1}{n!} B^n(t) + \cdots . \tag{1.1}$$

Každý prvek matice $\exp[B(t)]$ je součtem některé řady a výše uvedená definice v sobě zahrnuje celkem $n \times n$ řad. Lze ukázat, že každá tato řada konverguje, a tím prokázat korektnost této definice. Použitím Definice **??** se snadno dokáže následující

Věta 1.2. *Je-li O nulová $n \times n$ matice, pak $\mathrm{e}^O = E$.*

Další vlastnost říká, že pro exponenciálu matice platí podobná výpočetní pravidla jako pro exponenciální funkci

Věta 1.3. *Jestliže $n \times n$ matice A a B komutují, tj. platí-li $AB = BA$, potom*

$$\mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^B \cdot \mathrm{e}^A.$$

Důsledkem Věty **??** i volbě $B = -A$je fakt, že exponenciála matice e^A má matici inverzní a platí

$$\left(\mathrm{e}^A\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}.$$

Příklad 1.4. Najděte (pomocí definice) exponenciály matice e^{At} v případě, že $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. Přímým výpočtem obdržíme $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pro $n = 1, 2, \dots$. Proto

$$\mathrm{e}^{At} = E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Postup z tohoto příkladu je možno v některých případech zobecnit na postup uvedený v následující větě.

Věta 1.5. *Je-li A matice typu $n \times n$ a P je regulární matice taková, že*

$$P^{-1}AP = \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

potom platí

$$\mathrm{e}^A = P\exp(\Lambda)P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Zvolíme-li v této větě matici P jako 2×2 jednotkovou matici, obdržíme ihned výsledek příkladu č. **??**. Existují ovšem matice, které nesplňují předpoklady předchozí věty. Určitě jsou to matice s komplexními vlastním čísly. Takovou maticí se budeme zabývat v následujícím příkladě.

Příklad 1.6. Najděte (pomocí definice) exponenciálu matice e^{At} v případě, že

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Přímým výpočtem lze získat jednotlivé mocniny

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A^5 = A.$$

Proto

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{At} &= E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!} & \displaystyle -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

1.1.2 Užití exponenciály matice

Je-li A konstantní $n \times n$ matice pak s pomocí vzorce (**??**) dostaneme

$$\left(\mathrm{e}^{At}\right)' = A\mathrm{e}^{At}. \tag{1.2}$$

Tento vztah dává možnost zapsat obecné řešení homogenního systému diferenciálních lineárních rovnic (**??**) s konstantní maticí A, tj. systému

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay. \tag{1.3}$$

Věta 1.7. *Fundamentální matice systému (**??**) s konstantní maticí A je dána vztahem*

$$Y(t) = \mathrm{e}^{At}.$$

S pomocí vztahu (**??**) dostaneme

$$Y'(t) = A\mathrm{e}^{At} = AY(t),$$

tj. matice $Y(t)$ je skutečně řešení systému (**??**). Navíc splňuje podmínku

$$Y(0) = E.$$

Z této skutečnosti snadno plyne následující věta.

Věta 1.8. *Obecné řešení $y = y(t)$ lineárního systému* (**??**) *je dané vzorcem*

$$y = y(t) = \mathrm{e}^{At} \cdot C \tag{1.4}$$

kde $C = (C_1, \ldots, C_n)^T$ je konstantní vektor.

Přímý výpočet exponenciály matice podle definice (tj. podle vzorce (**??**)) je obyčejně nepoužitelný kvůli tomu, že není možné najít součet definiční řady. Jak vyplývá z Věty **??** je pro nalezení některého řešení (nebo pro nalezení obecného řešení systému (**??**) užitečné mít metody pro výpočet exponenciály matice. Takové existují. Nyní uvedeme jinou metodu.

1.1.3 Metoda pro nalezení exponenciály matice

Metoda nalezení exponenciály matice, kterou nyní uvedeme, vyžaduje nalezení jistého partikulárního řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty. Důležitou roli hraje pojem tzv. *charakteristického polynomu* a *charakteristické rovnice*. Předpokládejme, že je dána konstantní $n \times n$ matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Charakteristickým polynomem matice A nazýváme polynom $p(\lambda)$ definovaný pomocí determinantu

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Je zřejmé, že po provedení výpočtu determinantu lze polynom $p(\lambda)$ zapsat ve schématickém tvaru skutečného polynomu například takto

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

kde koeficienty $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ dostaneme, když determinant spočítáme. V následující větě předpokládáme, že charakteristický polynom byl získán právě tímto způsobem. Často bývá charakteristický polynom definován jako determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

který lze pomocí původního polynomu vyjádřit ve tvaru $(-1)^n p(\lambda)$. Tento znaménkový rozdíl nemá vliv na tvar a řešení tzv. *charakteristické rovnici* matice A, která má tvar

$$p(\lambda) = 0.$$

Věta 1.9. *Předpokládejme, že A je konstantní $n \times n$ matice, jejíž charakteristický polynom má tvar*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Předpokládejme dále, že $y(t)$ je řešení počáteční úlohy pro lineární homogenní diferenciální rovnici n-tého řádu se stejnými koeficienty:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \tag{1.5}$$

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)} = 0,\ y^{(n-1)}(0) = 1. \tag{1.6}$$

Označme

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Pak pro exponenciálu matice platí vztah:

$$\mathrm{e}^{At} = z_1(t)I + z_2(t)A + \cdots + z_n(t)A^{n-1}.$$

Příklad 1.10. Nalezněte exponenciálu matice matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristický polynom $\lambda^2-3\,\lambda-4$ a vlastní čísla $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=4$. Odpovídající pomocná diferenciální rovnice $y''-3y'-4=0$ má obecné řešení $y=C_1e^{-t}+C_2e^{4t}$.
Z podmínek $y(0)=0$, $y'(0)=1$ určíme konstanty C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{rrcr} 0=y(0)= & C_1 & + & C_2 \\ 1=y'(0)= & -C_1 & + & 4C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} C_1=-\frac{1}{5} \\ C_2=\frac{1}{5} \end{array}$$

Dostáváme tak $y(t)=\frac{1}{5}(-e^{-t}+e^{4t}$, $y'(t)=\frac{1}{5}(e^{-t}+4e^{4t}$. Dále určíme funkce $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -e^{-t}+e^{4t} \\ e^{-t}+4e^{4t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{-t}+e^{4t} \\ -e^{-t}+e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{4e^{-t}+e^{4t}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-e^{-t}+e^{4t}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{-t}+2e^{4t} & -2e^{-t}+2e^{4t} \\ 3e^{-t}+3e^{4t} & 2e^{-t}+3e^{4t} \end{pmatrix}$$

$\square$

Příklad 1.11. Nalezněte exponenciálu matice matice $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristický polynom $\lambda^2-2\,\lambda+4$ a vlastní čísla $\lambda_{1,2}=1\pm 2j$. Odpovídající pomocná diferenciální rovnice $y''-2y'+4=0$ má obecné řešení $y=e^t(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$.

Z podmínek $y(0)=0$, $y'(0)=1$ určíme konstanty C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0=y(0)= & C_1 & \\ 1=y'(0)= & C_1 & + \quad 2C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1=0 \\ C_2=\frac{1}{2} \end{array}$$

Dostáváme tak $y(t)=\frac{1}{2}e^t\sin 2t$, $y'(t)=\frac{1}{2}e^t(2\cos 2t+\sin 2t)$. Dále určíme funkce $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t\sin 2t \\ e^t(2\cos 2t+\sin 2t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t(2\cos 2t-\sin 2t) \\ e^t\sin 2t \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{e^t}{2}(2\cos 2t-\sin t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2}\sin 2t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 1.12. Nalezněte exponenciálu matice matice $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristický polynom $\lambda^2-4\lambda+4$ a vlastní čísla $\lambda_{1,2}=2$. Odpovídající pomocná diferenciální rovnice $y''-4y'+4=0$ má obecné řešení $y=e^{2t}(C_1+C_2t)$.
Z podmínek $y(0)=0$, $y'(0)=1$ určíme konstanty C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0=y(0)= & C_1 & \\ 1=y'(0)= & 2C_1 & + \quad C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1=0 \\ C_2=1 \end{array}$$

Dostáváme tak $y(t) = e^{2t}t$, $y'(t) = e^{2t}(2t+1)$. Dále určíme funkce $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t}t \\ e^{2t}(2t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1-2t) \\ e^{2t}t \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{2t}(1-2t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{2t}t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

□

1.2 Cauchyova úloha pro lineární systémy

1.2.1 Cauchyova úloha pro homogenní systém

Počáteční (Cauchyovou) úlohou na intervalu $\mathcal{I}$ pro homogenní systém rozumíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y, \quad y(t_0) = y_0, \tag{1.8}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. Tato úloha má jediné řešení, která můžeme zapsat pomocí jakékoli fundamentální matice $\Phi(t)$. Tato má pro libovolné $t_0 \in \mathcal{I}$ inverzní matici $(\Phi(t_0))^{-1}$ a pronásobením touto konstantní maticí dostáváme normovanou fundamentální matici v bodě $t = t_0$ ve tvaru e $\Phi(t, t_0) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}$. Taková matice je řešením úlohy

$$Y' = AY(t), \quad Y(t_0) = E,$$

Analogicky platí, že řešení úlohy (**??**) je dáno vztahem

$$y(t) = \Phi(t, t_0)y_0. \tag{1.9}$$

1.2.2 Cauchyova úloha pro homogenní systém s konstantní maticí

Nyní uvažujme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro homogenní systém s konstantní maticí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay, \quad y(t_0) = y_0, \tag{1.10}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. V tomto případě je fundamentální matice ve tvaru exponenciály $\Phi(t) = e^{At}$ a normovanou fundamentální matici v bodě $t = t_0$ je maticová exponenciála

$$\Phi(t, t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} \tag{1.11}$$

a řešení (**??**) zapsat vztahem (**??**), tj.,

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}y_0.$$

1.2.3 Cauchyova úloha pro nehomogenní systém

Hledejme nyní řešení počáteční (Cauchyovy) úlohy pro nehomogenní systém

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{1.12}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. Také tato úloha má jediné řešení. Obecné řešení odpovídající homogenní úlohy můžeme zapsat ve tvaru $y(t) = \Phi(t; t_0) \cdot C$, kde $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ je konstantní vektor. Použijeme metodu variace konstant a řešení $y(t)$ na intervalu $\mathcal{I}$ předpokládáme ve tvaru

$$y(t) = \Phi(t, t_0) \cdot C(t) \tag{1.13}$$

tak, aby platilo $y(t_0) = y_0$. Vztah, kterému vyhovuje vektorová funkce $C(t)$ je

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t; t_0)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s; t_0)b(s)\mathrm{d}s.$$

Abychom dostali řešení úlohy (**??**), volíme $C(t_0) = y_0$, tedy:

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0 + \Phi(t; t_0) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s; t_0)b(s)\mathrm{d}s. \tag{1.14}$$

Nyní pro $t, t_0, s \in \mathcal{I}$ užijeme vztah:

$$\Phi(t, t_0)\Phi^{-1}(s, t_0) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}(\Phi(s)(\Phi(t_0))^{-1})^{-1} = \Phi(t)(\Phi(s))^{-1} = \Phi(t, s) \tag{1.15}$$

a získáme tak konečnou podobu:

$$y(t) = \Phi(t;t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t;s)b(s)\mathrm{d}s. \tag{1.16}$$

1.2.4 Cauchyova úloha pro nehomogenní systém s konstantní maticí

V případě že uvažujme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro nehomogenní systém s konstantní maticí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{1.17}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$, můžeme užitím vztahu (**??**) nalezené řešení (**??**) zjednodušit. Protože

$$\Phi(t;t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} \quad \text{a} \quad \Phi(t;s) = \mathrm{e}^{(t-s)A},$$

má řešení (**??**) tvar

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}b(s)\mathrm{d}s. \tag{1.18}$$

Příklad 1.13. Nalezněte obecné řešení systému lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' & = & y_1 & + & 2y_2 & + & 2 & - & 5t \\ y_2' & = & 3y_1 & + & 2y_2 & + & 5 & - & 7t \end{array}$$

Řešení. Matice soustavy je konstantní $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ a pravá strana má tvar $b(t) = \begin{bmatrix} 2 - 5\,t \\ 5 - 7\,t \end{bmatrix}$.

V příkladě **??** jsme určili exponenciálu matice A ve tvaru $e^{tA} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3\,e^{-t} + 2\,e^{4\,t} & 2\,e^{4\,t} - 2\,e^{-t} \\ 3\,e^{4\,t} - 3\,e^{-t} & 2\,e^{-t} + 3\,e^{4\,t} \end{bmatrix}$. Nyní určíme integrál ze vzorce (**??**) ($t_0 = 0$):

$$\int_0^t e^{(t-s)A} b(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{5}\int_0^t \begin{bmatrix} -4\,e^{-t+s} - 1\,e^{-t+s}s + 14\,e^{4\,t-4\,s} - 24\,e^{4\,t-4\,s}s \\ 21\,e^{4\,t-4\,s} - 36\,e^{4\,t-4\,s}s + 4\,e^{-t+s} + e^{-t+s}s \end{bmatrix} ds =$$

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} \int_0^t -4\,e^{-t+s} - 1\,e^{-t+s}s + 14\,e^{4\,t-4\,s} - 24\,e^{4\,t-4\,s}s\;ds \\ \int_0^t 21\,e^{4\,t-4\,s} - 36\,e^{4\,t-4\,s}s + 4\,e^{-t+s} + e^{-t+s}s\;ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\,e^{-t} + \frac{2}{5}\,e^{4\,t} + t - 1 \\ \frac{3}{5}\,e^{4\,t} - \frac{3}{5}\,e^{-t} + 2\,t \end{bmatrix}$$

Nyní dosadíme za vektor počátečních hodnot vektor $C = [C_1, C_2]$ a celkově dostáváme řešení:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \frac{C_1}{5}\begin{bmatrix} 3\,e^{-t} + 2\,e^{4\,t} \\ 3\,e^{4\,t} - 3\,e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{C_2}{5}\begin{bmatrix} 2\,e^{4\,t} - 2\,e^{-t} \\ 2\,e^{-t} + 3\,e^{4\,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\,e^{-t} + \frac{2}{5}\,e^{4\,t} + t - 1 \\ \frac{3}{5}\,e^{4\,t} - \frac{3}{5}\,e^{-t} + 2\,t \end{bmatrix}.$$

$\square$

1.3 Užití mocninných řad pro rovnice druhého řádu

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se speciálním typem diferenciální rovnice druhého řádu, Besselovou rovnicí. Ukážeme, že řešení této rovnice se hledá pomocí nekonečné řady. Zmíníme se o tzv. gama funkci, která se v řešení Besselovy rovnice objevuje. Popíšeme Besselovy funkce, pomocí nichž je řešení Besselovy rovnice popsáno.

Funkce gama

V dalším bude užívána funkce gama, která se definuje jako jako nevlastní integrál

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1.19}$$

Funkce $\Gamma(x)$ je tímto integrálem definována pro $x > 0$ (pro $x \leq 0$ integrál diverguje) a je pro $x > 0$ spojitá.

Pomocí integrace per partes lze ukázat , že

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.20}$$

Pro $x = 1$ máme

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1,$$

užitím (**??**) vidíme, že pro přirozená čísla n dostáváme

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.21}$$

Funkce gama je tedy jakýmsi zobecněním faktoriálu.

1.4 Besselova rovnice

Při popisu mnohých fyzikálních jevů hraje důležitou roli diferenciální rovnice

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{1.22}$$

Tato rovnice se nazývá **Besselova**. Budeme předpokládat, že $\nu \geq 0$. Řešení vyjádříme pomocí mocninné řady se středem v 0. Bod $x = 0$ je tzv. regulárním singulárním bodem Besselovy rovnice.

1.4.1 Konstrukce řešení ve tvaru řady

Řešení Besselovy rovnice můžeme hledat ve tvaru

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \tag{1.23}$$

nebo (vytkneme-li výraz x^r) ve tvaru

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kde koeficienty řady c_n a číslo r určíme v průběhu výpočtů. Dsazením a úpravami lze odvodit

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = c_0(r^2 - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n((n+r)^2 - \nu^2)x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}. \qquad (1.24)$$

Z tzv. **charakteristické rovnice**

$$r^2 - \nu^2 = 0$$

určíme hodnotu čísla r. Vidíme, že kořeny charakteristické rovnice jsou $r_1 = \nu$ a $r_2 = -\nu$.

Pro $r = \nu$ z (**??**) zbude

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}.$$

Výraz na pravé straně lze upravit:

$$x^\nu \left(c_1(1+2\nu)x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2} + c_k]x^{n+2} \right).$$

Tento výraz je ovšem roven 0 a aby byla uvedená rovnost splněna pro každé x, musí platit

$$\begin{aligned} (1+2\nu)c_1 &= 0 \\ (k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2}+c_k &= 0 \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned} \tag{1.25}$$

neboli

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+2+2\nu)}, \quad k=0,1,2,\dots. \tag{1.26}$$

Protože podle (**??**) je $c_1 = 0$, lze ověřit, že liché členy řady jsou tedy nulové a zbývá určit sudé členy řady. Přeznačíme $k+2=2n$ (indexům $k=0,2,4,\dots$ teď odpovídá $n=1,2,3,\dots$) a vztah (**??**) můžeme zapsat jako

$$c_{2n} = \frac{-c_{2n-2}}{2^2 n(n+\nu)}, \quad n=1,2,3,\dots. \tag{1.27}$$

Postupným dosazováním případně užitím matematické indukce lze odvodit

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)}, \quad n=1,2,3,\dots. \tag{1.28}$$

Konstanta c_0 se standardně se volí $c_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}$ a konečný tvar s využitím vztahu (**??**)je:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)\Gamma(1+\nu)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu}\cdot n!\cdot\Gamma(1+\nu+n)}.$$

1.5 Besselovy funkce

Jedno řešení Besselovy rovnice je tedy

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} .$$

Pro $\nu \geq 0$ tato řada konverguje alespoň na intervalu $\langle 0, \infty)$.

Funkce popisující právě získané řešení se obvykle značí $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} . \tag{1.29}$$

Pro druhý kořen charakteristické rovnice rovnice, $r_2 = -\nu$, zcela analogicky dostaneme

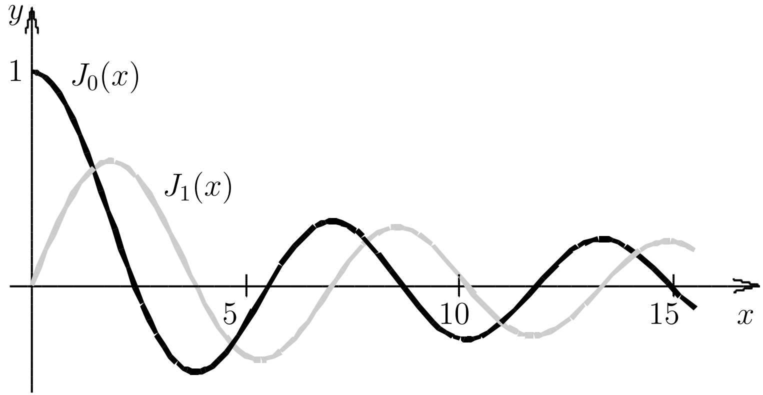
$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} . \tag{1.30}$$

Funkce $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ se nazývají **Besselovy funkce prvního druhu** řádu ν, resp. $-\nu$.

Na obrázku **??** jsou grafy funkcí $y = J_0(x)$ a $y = J_1(x)$.

Dá se ukázat, že jestliže ν není celé číslo, funkce $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ jsou lineárně nezávislé. V tomto případě je obecné řešení rovnice (**??**) na intervalu $(0, \infty)$

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \tag{1.31}$$



Obrázek 1.1: Besselovy funkce prvního druhu řádu 0 a 1

Příklad 1.14. Najděte obecné řešení rovnice

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

na intervalu $(0, \infty)$.

Řešení. V našem případě je $\nu^2 = 1/4$, a tedy $\nu = 1/2$. Vidíme, že ν není celé číslo, a tedy obecné řešení zadané rovnice je

$$\underline{\underline{y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)}}.$$

□