Příjmení, jméno, ID  17. 1. 2020  A

.................................................................................

1. Vektory $\vec{v}_1 = (1,-1,-1,1)^T, \vec{v}_2 = (-1,3,1,-3)^T, \vec{v}_3 = (-1,5,3,-3)^T, \vec{v}_4 = (-2,6,2,-2)^T$ ortogonalizujte v daném pořadí. 10bodů
   $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1,-1,-1,1)^T$,
   $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = (-1,3,1,-3)^T - \frac{-8}{4}(1,-1,-1,1)^T = (1,1,-1,-1)^T$,
   $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = (-1,5,3,-3)^T - \frac{-12}{4}(1,-1,-1,1)^T - \frac{4}{4}(1,1,-1,-1)^T = (1,1,1,1)^T$
   $\vec{u}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 = (-2,6,2,-2)^T - \frac{-12}{4}(1,-1,-1,1)^T - \frac{4}{4}(1,1,-1,-1)^T - \frac{4}{4}(1,1,1,1)^T = (-1,1,-1,1)^T$

2. Diskutujte definitnost matice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ vzhledem k parametru $a$. 10bodů
   $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 4a-1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 4a^2-5a = 4a\left(a-\frac{5}{4}\right)$, pozitivně definitní pro $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ to jest $a \in \left(\frac{5}{4}, \infty\right)$, pro $a \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$ je indefinitní

3. Vypočtěte exponenciálu matice $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ 10bodů
   $\chi_A = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 6 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)$ je minimální polynom. $P(x) = Ax+B, f(x) = e^{xt}$
   $$e^{2t} = 2A + B \wedge e^{4t} = 4A + B \Rightarrow P(x) = \frac{1}{2}\left(e^{4t}-e^{2t}\right)x + 2e^{2t} - e^{4t},$$
   $$P(A) = \begin{pmatrix} 3e^{2t}-2e^{4t} & -3e^{2t}+3e^{4t} \\ 2e^{2t}-2e^{4t} & -2e^{2t}+3e^{4t} \end{pmatrix}$$

4. Určete největší řešení (kořen) rovnice $4x = 3^x$ s přesností $10^{-2}$. 10bodů
   největší řešení rovnice $= 1,794$, nejmenší řešení rovnice $= 0,379$

5. K zadaným bodům vypočtěte lineární a kvadratické vyrovnáni. 10bodů

| x | -2 | -1 | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 1 | -1 | 1 | 19 |

   $y = 2x + 3 \quad y = x^2 - x - 1 \quad \left.\begin{array}{ccc} 5 & 5 & 35 \\ 5 & 35 & 125 \\ 35 & 125 & 659 \end{array}\right| \begin{array}{c} 25 \\ 85 \\ 499 \end{array}$

6. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{\cos(u)}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$ přesností $10^{-2}$ 10bodů
   $0,6829330318$

7. Zaveďte Zaveďte pojmy vlastní čísla a vektory a uveďte jejich základní vlastnosti,. 5bodů

8. Lineární a kvadratické vyrovnání, metoda nejmenších čtverců 5bodů

Příjmení, jméno, ID 17. 1. 2019 B

.............................................................................................

1. Vektory $\vec{v}_1 = (1,1,-1,-1)^T, \vec{v}_2 = (-2,-4,2,4)^T, \vec{v}_3 = (-3,-5,5,7)^T, \vec{v}_4 = (-4,-4,4,8)^T$ ortogonalizujte v daném pořadí. 10bodů
$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1,1,-1,-1)^T,$
$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = (-2,-4,2,4)^T - \frac{-12}{4}(1,1,-1,-1)^T = (1,-1,-1,1)^T,$
$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = (-3,-5,5,7)^T - \frac{-20}{4}(1,1,-1,-1)^T - \frac{4}{4}(1,-1,-1,1)^T = (1,1,1,1)^T$
$\vec{u}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 = (-4,-4,4,8)^T - \frac{-20}{4}(1,1,-1,-1)^T - \frac{4}{4}(1,1,-1,-1)^T - \frac{4}{4}(1,-1,-1,1)^T = (-1,1,-1,1)^T$

2. Diskutujte definitnost matice $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ vzhledem k parametru $a$. 10bodů

$$\Delta_1 = -3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -3a-1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -3a^2-2a+5 = -3\left(a+\frac{5}{3}\right)(a-1),$$

negativně definitní pro $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ to jest $a \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$, pro $a \in \left(-\frac{5}{3}\,\infty\right)$ je indefinitní

3. Vypočtěte exponenciálu matice $A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ 10bodů

$\chi_A = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 6 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3)$ je minimální polynom. $P(x) = Ax + B, f(x) = e^{xt}$

$$e^{-3t} = -3A + B \wedge e^{-t} = -A + B \Rightarrow P(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)x + \frac{1}{2}\left(3e^{-t} - e^{-3t}\right),$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 3e^{-3t} & 3e^{-t} - 3e^{-3t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-3t} & 3e^{-t} - 2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

4. Určete největší řešení (kořen) rovnice $4^x = 5x$ s přesností $10^{-2}$. 10bodů
největší řešení rovnice = 1.4076, nejmenší řešení rovnice = 0,3054

5. K zadaným bodům

| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 1 | -1 | 1 | 1 |

vypočtěte lineární a kvadratické vyrovnáni. 10bodů

$$y = 2 - x \quad y = 1 - 3x + x^2 \quad \begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 15 & 5 \\ 5 & 15 & 35 & -5 \\ 15 & 35 & 99 & 9 \end{array}$$

6. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$ přesností $10^{-2}$ 10bodů
0,3218

7. Skalární součin, ortogonalizační proces. 5bodů

8. Numerická integrace funkcí 5bodů