Příjmení, jméno, ID 27. 1. 2020 A

....

1. Vektory $\vec{v}_1 = (1,1,1,1)^T, \vec{v}_2 = (-1,-1,-5,-1)^T, \vec{v}_3 = (-1,-4,-6,-1)^T, \vec{v}_4 = (0,-4,-6,-2)^T$ ortogonalizujte v daném pořadí. 10bodů
   $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1,1,1,1)^T$,
   $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = (-1,-1,-5,-1)^T - \frac{-8}{4}(1,1,1,1)^T = (1,1,-3,1)^T$,
   $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = (-1,-4,-6,-1)^T - \frac{-12}{4}(1,1,1,1)^T - \frac{12}{12}(1,1,-3,1)^T = (1,-2,0,1)^T$
   $\vec{u}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 = (0,-4,-6,-2)^T - \frac{-12}{4}(1,1,1,1)^T - \frac{12}{12}(1,1,-3,1)^T - \frac{6}{6}(1,-2,0,1)^T = (1,0,0,-1)^T$

2. Diskutujte definitnost matice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & a \\ 1 & a & 4 \end{pmatrix}$ vzhledem k parametru a. 10bodů

   $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & a \\ 1 & a & 4 \end{vmatrix} = -2a^2+a+28 = -2\left(a+\frac{7}{2}\right)(a-4)$, pozitivně definitní pro $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ to jest $a \in \left(-\frac{7}{2}, 4\right)$, pro $a \in R \setminus \left(-\frac{7}{2}, 4\right)$ je indefinitní

3. Vypočtěte exponenciálu matice $A = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$ 10bodů

   $\chi_A = \begin{vmatrix} -8-\lambda & 5 \\ -10 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3)$ je minimální polynom. $P(x) = Ax + B, f(x) = e^{xt}$

$$e^{2t} = 2A + B \wedge e^{-3t} = -3A + B \Rightarrow P(x) = \frac{1}{5}\left(e^{2t} - e^{-3t}\right)x + \frac{1}{5}\left(3e^{2t} + 2e^{-3t}\right),$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 2\,e^{-3t} - e^{2t} & e^{2t} - e^{-3t} \\ -2\,e^{2t} + 2\,e^{-3t} & -e^{-3t} + 2\,e^{2t} \end{pmatrix}$$

4. Určete nejmenší řešení (kořen) rovnice $x^3 - 2x^2 - 10x + 2 = 0$ s přesností 10^{-2}. 10bodů
   existují 3 řešení rovnice $-2,438069399,\ 0,1932524299,\ 4,244816969$

5. K zadaným bodům vypočtěte lineární a kvadratické vyrovnáni. 10bodů

x	-3	0	1	2	5
y	11	-1	-1	1	19

$y = x + \frac{24}{5}$ $\quad y = x^2 - x - 1$ $\quad \left.\begin{array}{ccc} 5 & 5 & 39 \\ 5 & 39 & 107 \\ 39 & 107 & 723 \end{array}\right| \begin{array}{c} 29 \\ 63 \\ 577 \end{array}$

6. Vypočtěte integrál $\int_1^2 \frac{\ln}{u^2+1}\,du$ přesností 10^{-2} 10bodů
   $0,1073672029$

7. Hermiteovské matice a jejich definitnost, Sylvestrovo kritérium. 5bodů

8. Numerické metody řešení rovnic. 5bodů

Příjmení, jméno, ID 27. 1. 2019 B

....

1. Vektory $\vec{v}_1 = (1,1,1,1)^T, \vec{v}_2 = (-2,-2,-6,-2)^T, \vec{v}_3 = (-3,-6,-8,-3)^T, \vec{v}_4 = (-2,-6,-8,-4)^T$ ortogonalizujte v daném pořadí. 10bodů

   $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1,1,1,1)^T,$

   $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = (-2,-2,-6,-2)^T - \frac{-12}{4}(1,1,1,1)^T = (1,1,-3,1)^T,$

   $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = (-3,-6,-8,-3)^T - \frac{-20}{4}(1,1,1,1)^T - \frac{12}{12}(1,1,-3,1)^T = (1,-2,0,1)^T$

   $\vec{u}_4 = \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_4\cdot\vec{u}_3}{\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3}\vec{u}_3 = (-2,-6,-8,-4)^T - \frac{-20}{4}(1,1,1,1)^T - \frac{12}{12}(1,1,-3,1)^T - \frac{6}{6}(1,-2,0,1)^T = (1,0,0,-1)^T$

2. Diskutujte definitnost matice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ vzhledem k parametru a. 10bodů

   $$\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2 = -(a+2)(a-1),$$

   pozitivně definitní pro $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ to jest $a \in (-1,2)$, pro $a \in R \setminus (-1,2)$ je indefinitní

3. Vypočtěte exponenciálu matice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ 10bodů

   $\chi_A = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 8 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+3)$ je minimální polynom. $P(x) = Ax + B, f(x) = e^{xt}$

   $$e^{-3t} = -3A + B \wedge e^t = A + B \Rightarrow P(x) = \frac{1}{4}\left(e^t - e^{-3t}\right)x + \frac{1}{4}\left(3e^t + e^{-3t}\right),$$

   $$P(A) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-3t} + 2\,\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-3t} \\ 2\,\mathrm{e}^t - 2\,\mathrm{e}^{-3t} & 2\,\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

4. Určete největší řešení (kořen) rovnice $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ s přesností 10^{-2}. 10bodů

   existují 3 řešení rovnice $-0,5320888862,\ 0.6527036447, 12, 879385242$

5. K zadaným bodům vypočtěte lineární a kvadratické vyrovnáni. 10bodů

x	-2	0	1	2	4
y	11	1	-1	-1	5

   $y = 4 - x \quad y = 1 - 3x + x^2 \quad \left.\begin{array}{ccc} 5 & 5 & 25 \\ 5 & 25 & 65 \\ 25 & 65 & 289 \end{array}\right| \begin{array}{c} 15 \\ -5 \\ 119 \end{array}$

6. Vypočtěte integrál $\int_2^3 \frac{\ln(u)}{u^2+2}\,du$ přesností 10^{-2} 10bodů

   $0,1100015430$

7. Maticové funkce. 5bodů

8. Interpolace funkcí 5bodů