DOMÁCÍ ÚLOHA č. 1

V případě prezenční výuky lze z této sady příkladů získat maximálně 3 body. Každý příklad je hodnocený 1 bodem.V zadání se vyskytuje parametr „a“. Každý student si určí hodnotu tohoto parametru jako součet cifer dne narození a v případě víceciferného výsledku tyto cifry sečte (29.12.1987=2+9=11⇒ $a = 2$).

1. Rozhodněte pro jaký parametr p jsou vektory $\vec{v}_1 = (1, 0, 1, 1)^T$, $\vec{v}_2 = (a, 1, a, a + 2)^T$, $\vec{v}_3 = (2, -2, p, -a)^T$, $\vec{v}_4 = (a, -a, a, -p)^T$ lineárně nezávislé, tj. tvoří bázi.

   Dále vypočtěte souřadnice vektoru $\vec{b} = (2a, -a - 1, 2a + 2, -p)^T$ vzhledem k bázi vektorů $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$.

2. L je lineární zobrazení vektorového prostoru reálných trojic do prostoru polynomů stupně nejvýše 2, pro které platí

$$\begin{aligned} L(a+1, a, a, 1-a) &= 2t^2 + (2a+1)t + a + 2, \\ L(1-a, 1-a, a-2) &= -t^2 + (2-2a)t - a, \\ L(a, a, 1-a) &= t^2 + 2at + a + 1. \end{aligned}$$

   Určete obraz vektoru $L(1, 2, -1)$.

3. Pro lineární zobrazení L (z předchozího příkladu) nalezněte trojici (a, b, c) pro kterou platí

$$L(a, b, c) = -(3t^2 + 2)$$

4. Řešte systém lineárních rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a & \sin\frac{a\pi}{2} \\ 1 & 0 & a & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 - \cos\frac{a\pi}{2} \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Je dán systém 3 lineárních rovnic o 3 neznámých. V matici soustavy systému $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ nahraďte číslo, které je rovno hodnotě čísla a parametrem p. Vyřešte tento systém, je-li vektorem pravých stran $(8, 8, 8)^T$ a proveďte diskusi vzhledem k parametru.

6. Vypočtěte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} -4\,a+1 & -4\,a & 8\,a \\ -4\,a-6 & -4\,a-5 & 8\,a+12 \\ -4\,a-2 & -4\,a-2 & 8\,a+5 \end{pmatrix}$$

7. Řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} a-5 & a & a-2 \\ a & a+1 & a+1 \\ a-7 & a & a-3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2\,a-5 & a & -2+2\,a \\ 2\,a+1 & a+1 & 2\,a+2 \\ 2\,a-7 & a & -3+2\,a \end{pmatrix}$$

8. Řešte maticovou rovnici

$$Y \begin{pmatrix} a-1 & a & a-4 \\ a & a+1 & a+1 \\ a-1 & a & a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,a & a & -5\,a \\ -3\,a & 1-a & 4\,a \\ -3\,a & 1-a & 4\,a \end{pmatrix}$$

9. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} a-1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix}$$

10. Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} a-1 & a-3 & a-1 \\ a-3 & a-1 & a-1 \\ a-2 & a-2 & a-1 \end{pmatrix}$$