0.1 Příklady pro samostatnou práci

Některá zadání obsahují přirozené číslo $a \in \mathbb{N}$. Při potížích řešit příklady v závislosti na tomto parametru je možné dosadit konkrétní hodnotu a a výsledek zkontrolovat porovnáním s dosazením stejného parametru a do výsledku, který je níže.

Příklad S 0.1. Rozhodněte, zda zadané vektory $\vec{e}_i$ tvoří bázi a určete souřadnice α_i vektoru $\vec{v}$ vzhledem k těmto vektorům:

a) $\vec{e}_1 = (1, 2, -1)^T, \vec{e}_2 = (0, 1, 2)^T,\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T, \vec{v} = (4, -5, 7)^T$

b) $\vec{e}_1 = (1, 2, 1)^T, \vec{e}_2 = (0, 1, -2)^T,\ \vec{e}_3 = (1, 2, 0)^T, \vec{v} = (4, -5, 2)^T$

c) $\vec{e}_1 = (1, 0, 1, 2)^T, \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 1)^T,\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 2)^T,\ \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 2)^T,\ \vec{v} = (6, 2, 3, 4,)^T$

d) $\vec{e}_1 = (1, 0, 1, 2)^T, \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 1)^T,\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 2)^T,\ \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 2)^T,$
$\vec{v} = (2, 3, 6, -1)^T$

e) $\vec{e}_1 = (1, 0, 1, 1)^T, \vec{e}_2 = (0, a, 0, a)^T,\ \vec{e}_3 = (-1, 0, 1, 1)^T,\ \vec{e}_4 = (0, 1, 0, 2)^T,$
$\vec{v} = (2a, 2a, 0, a)^T$

f) $\vec{e}_1 = (3 - a, a, 2 + a, a)^T, \vec{e}_2 = (3 + a, 2 - a, 1 - a, -a)^T,\ \vec{e}_3 = (1 - a, a, a + 1, a)^T,$
$\vec{e}_4 = (a - 4, 1 - a, -1 - a, 1 - a)^T,\ \vec{v} = (2, -4, 0, 2)^T$

Příklad S 0.2. Rozhodněte, pro jaký parametr p zadané vektory $\vec{e}_i$ tvoří bázi a určete souřadnice α_i vektoru $\vec{v}$ vzhledem k této bázi:

a) $\vec{e}_1 = (p, a)^T, \vec{e}_2 = (a, p)^T,\ \vec{v} = (-a, a)^T$

b) $\vec{e}_1 = (1 - a, a, -1)^T, \vec{e}_2 = (p, 1, 0)^T,\ \vec{e}_3 = (a, -a, 1)^T, \vec{v} = (0, 1 + p, 1)^T$

c) $\vec{e}_1 = (1, 2, a+p)^T, \vec{e}_2 = (a+1, 2a, a(a+p))^T,\ \vec{e}_3 = (1-a, -p, -p(a+p))^T, \vec{v} = (0, 0, a+p)^T$

Příklad S 0.3. Pro trojúhelník zadaný body A, B, C vypočtěte velikosti stran a vnitřních úhlů:

a) $A = [1, 2, 3]^T, B = [1, 1, 2]^T,\ C = [4, 5, 6]^T$

b) $A = [1, 2, 1]^T, B = [2, 2, 2]^T,\ C = [1, 1, 1]^T$

c) $A = [\sqrt{3}, 2, 1]^T, B = [2\sqrt{3}, 2, 1]^T,\ C = [\sqrt{3}, 2, 2]^T$

d) $A = [-2, 2, 3]^T, B = [2, -3, 2]^T,\ C = [4, 5, -1]^T$

Příklad S 0.4. Pro matice A, B vypočtěte

$$A = \begin{pmatrix} a-5 & 10-a & 8-a \\ a-7 & 14-a & 11-a \\ 6-a & 11-a & 9-a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 13-a & a-8 & a-10 \\ 11-a & a-4 & a-7 \\ 12-a & a-7 & a-9 \end{pmatrix}$$

$$aA + (a-1)B, \quad 2A + 3B - A^T, \quad \frac{1}{4}(A+B)^2, \quad (A+B)A.$$

Příklad S 0.5. Vypočtěte následující determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 6 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & a \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 & a \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

Příklad S 0.6. Vypočtěte A^{-1} je-li

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2a+1 & a \\ 2a-1 & a-1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} a-5 & 10-a & 8-a \\ a-7 & 14-a & 11-a \\ a-6 & 11-a & 9-a \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 9+a & -a & 7+a \\ 8+a & -3-a & 7+a \\ 8+a & -7-a & 8+a \end{bmatrix}$

Příklad S 0.7. Řešte maticovou rovnici:

$$\begin{bmatrix} 13-a & a-8 & a-10 \\ 11-a & a-4 & a-7 \\ 12-a & a-7 & a-9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Příklad S 0.8. Pro uvedené matice soustavy A a sloupce pravých stran b řešte systémy lineárních rovnic $Ax = b$:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & -1 \\ -4 & 4 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

j) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Příklad S 0.9. Pomocí Cramerova pravidla řešte systém lineárních rovnic:

a) $\begin{array}{ccccccc} (a-1)x & + & (3-a)y & + & (4-a)z & = & a \\ (a-2)x & + & (4-a)y & + & (6-a)z & = & a \\ (a-2)x & + & (3-a)y & + & (5-a)z & = & a \end{array}$

b) $\begin{array}{ccccccc} (2a-1)x & + & (2-a)y & + & az & = & a \\ (2a+4)x & - & ay & = & (3+a)z & = & 3+a \\ (3-2a)x & + & (a-3)y & + & (1-a)z & = & 1-a \end{array}$

Příklad S 0.10. Řešte systém rovnic :

a) $\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 4y & + & 5z & + & \sin\frac{a\pi}{2}u & = & 1-\cos(a\pi) \\ x & + & y & & & + & u & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & + & 2u & = & 1 \\ -2x & - & 2y & + & z & & & = & 2 \end{array}$

b) $\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & = & 3 \end{array}$

Příklad S 0.11. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice A kde

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & a+4 \\ 2 & a+5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} a-5 & a-4 & a-1 \\ a-10 & a+1 & a-1 \\ a-3 & a-4 & a-3 \end{bmatrix}$

Příklad S 0.12. Rozhodněte zda je matice A diagonalizovatelná a v kladném případě nalezněte jí podobnou diagonální matici včetně matice X (matice $X^{-1}AX$ je diagonální), jestliže

a) $A = \begin{bmatrix} a-7 & -8 \\ 6 & a+7 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -a+1 & -a \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} -2\,a+4 & 2\,a-3 & -2\,a+2 \\ -2\,a & 1+2\,a & -2\,a \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{d) } A = \begin{bmatrix} -2\,a+8 & 2\,a-4 & -3\,a+9 \\ -6\,a+6 & 5\,a-3 & -6\,a+6 \\ -4 & 2 & a-5 \end{bmatrix}$$

Příklad S 0.13. Ortogonalizujte vektory $\vec{u}_i$ v daném pořadí, jestliže

$$\text{a)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,-1,1,-1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [-3,4,-1,4]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-3,1,-5,3]^T, \\ \vec{u}_4 &= [1,1,-5,3]^T \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,1,1,1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [-2,-6,-3,-5]^T, \\ \vec{u}_3 &= [0,-4,-3,-5]^T, \\ \vec{u}_4 &= [1,-5,-5,-3]^T \end{aligned}$$

$$\text{c)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,1,1,-1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [3,2,5,=2]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-3,-1,-5,3]^T, \\ \vec{u}_4 &= [1,-1,-5,3]^T \end{aligned} \qquad \text{d)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [2,-1,0,-1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [7,-2,1,-2]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-6,4,-4,2]^T, \\ \vec{u}_4 &= [-9,2,-11,1O]^T \end{aligned}$$

$$\text{e)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,1,1,1,1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [2,2,3,4,4]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-1,-3,-3,-5,-3]^T, \\ \vec{u}_4 &= [0,-1,2,-2,1]^T \\ \vec{u}_5 &= [1,-5,-3,-1,-7]^T \end{aligned} \qquad \text{f)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,1,2,1,1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [1,1,4,3,3]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-1,-3,-6,-5,-3]^T, \\ \vec{u}_4 &= [4,-2,-2,2,0]^T \\ \vec{v}_5 &= [-5,0,-5,-7,-2]^T \end{aligned}$$

Příklad S 0.14. Nalezněte ortogonální průmět vektoru $\vec{u}$ na vektorový prostor $\vec{V}$, který je lineárním obalem vektorů $\vec{v}_i$, jestliže

$$\text{a)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,-1,1,-1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [-3,4,-1,4]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-3,1,-5,3]^T, \\ \vec{u}_4 &= [1,1,-5,3]^T \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,1,1,1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [-2,-6,-3,-5]^T, \\ \vec{u}_3 &= [0,-4,-3,-5]^T, \\ \vec{u}_4 &= [1,-5,-5,-3]^T \end{aligned}$$

$$\text{c)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,1,1,-1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [3,2,5,=2]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-3,-1,-5,3]^T, \\ \vec{u}_4 &= [1,-1,-5,3]^T \end{aligned} \qquad \text{d)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [2,-1,0,-1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [7,-2,1,-2]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-6,4,-4,2]^T, \\ \vec{u}_4 &= [-9,2,-11,1O]^T \end{aligned}$$

$$\text{e)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,1,1,1,1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [2,2,3,4,4]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-1,-3,-3,-5,-3]^T, \\ \vec{u}_4 &= [0,-1,2,-2,1]^T \\ \vec{u}_5 &= [1,-5,-3,-1,-7]^T \end{aligned} \qquad \text{f)}\ \begin{aligned} \vec{u}_1 &= [1,1,2,1,1]^T, \\ \vec{u}_2 &= [1,1,4,3,3]^T, \\ \vec{u}_3 &= [-1,-3,-6,-5,-3]^T, \\ \vec{u}_4 &= [4,-2,-2,2,0]^T \\ \vec{v}_5 &= [-5,0,-5,-7,-2]^T \end{aligned}$$

Výsledky

0.1 a) $\alpha_1 = 49, \alpha_2 = -19, \alpha_3 = 7$, b) $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$,
c) $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = 2$, d) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 6, \alpha_4 = -1$
e) $\alpha_1 = a, \alpha_2 = 4 - a, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = a - 2$,

f) $\alpha_1 = 4a + 2, \alpha_2 = -4, \alpha_3 = -8a - 2, \alpha_4 = 12a + 12$
0.2 a) báze je pro $a \neq \pm p$, $\alpha_1 = \frac{a}{a-p}, \alpha_2 = \frac{-a}{a-p}$,
b) báze je pro všechna a $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$,

c) báze je pro $a \neq 0$ a $a \neq p$ $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{a+p}{p}, \alpha_3 = \frac{-2}{p}$,

0.3 a) $|AB| = \sqrt{2}$, $|AC| = 3\sqrt{3}$, $|BC| = \sqrt{29}$, $\angle BAC = \dfrac{\pi}{2} = 90^o$, $\angle ABC =$ $= \arccos\left(\dfrac{\sqrt{58}}{29}\right) \approx 74.77^o$, $\angle ACB = \arccos\left(\dfrac{3\sqrt{87}}{29}\right) \approx 15.22^o$

b) $|AB| = \sqrt{2}$, $|AC| = 1$, $|BC| = 1$, $\angle BAC = \dfrac{\pi}{4} = 45^o$, $\angle ABC = \dfrac{\pi}{4} = 45^o$, $\angle ACB = \dfrac{\pi}{2} = 45^o$

c) $|AB| = \sqrt{3}$, $|AC| = 1$, $|BC| = 2$, $\angle BAC = \dfrac{\pi}{2} = 90^o$, $\angle ABC = \dfrac{\pi}{6} = 30^o$, $\angle ACB = \dfrac{\pi}{3} = 60^o$

d) $|AB| = \sqrt{42}$, $|AC| = \sqrt{61}$, $|BC| = \sqrt{77}$, $\angle BAC = \arccos\left(\dfrac{13}{\sqrt{2562}}\right) \approx 75.12^o$, $\angle ABC = \arccos\left(\dfrac{29}{\sqrt{3234}}\right) \approx 59.34^o$, $\angle ACB = \arccos\left(\dfrac{4697}{\sqrt{2562}}\right) \approx 45.54^o$

0.4

$$aA + (a-1)B = \begin{pmatrix} 9a-13 & a+8 & 10-3a \\ 5a-11 & 9a+4 & 3a+7 \\ 7a-12 & 3a+7 & 9-a \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B - A^T = \begin{pmatrix} 34-2a & 3 & -8 \\ 9 & 2+2a & 2a-10 \\ 16 & 2a-10 & 2a-18 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 7 & -2 \\ 24 & 31 & 8 \\ 16 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)A = \begin{pmatrix} 8a-42 & 86-8a & 68-8a \\ 18a-114 & 224-18a & 178-18a \\ 10a-58 & 116-10a & 92-10a \end{pmatrix}$$

0.5

a) 8, **b**) 4, **c**) 2, **d**) 2, **e**) $2a$, **f**) 6

0.6 a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -a+1 & a \\ 2a-1 & -2a-1 \end{bmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5-a & -2 & a-2 \\ a-3 & 3 & -a-1 \\ -2a+7 & -5 & 2a \end{bmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 25+3a & -6a-49 & 3a+21 \\ -a-8 & 2a+16 & -7-a \\ -4a-32 & 8a+63 & -4a-27 \end{bmatrix}$

0.7
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} a-13 & -2 & 16-a \\ 15-a & 3 & a-19 \\ 2a-29 & -5 & 36-2a \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} 1 & a-12 \\ -1 & 14-a \\ 2 & 2a-27 \end{bmatrix}$$

0.8 a) $x=(1,-3)^T$, b) $x=(-27,-38)^T$, c) $x=(-23,17)^T$, d)nemá řešení, e) $x=(4,-3,1)^T$, f) $x=(t-1/3, 2/3-2t, t)^T$, g) nemá řešení, h) $x=(-22, 70, -112, -$ $-110)^T$
0.9 Výsledek nezávisí na parametru a:
a) $(x,y,z)^T=(1,-1,1)^T$,b) $(x,y,z)^T=(0,0,1)^T$
0.10 Výsledky jsou kvalitativně odlišné v závislosti na zbytku po dělení čísla a číslem 4.

a=4k ∞ řešení použitý je 1 parametr p $\mathbf{x}=(5-7p, 6p-5, 2-2p, p)^T$.

a=4k+1 Jedno řešení $\mathbf{x}=(-9,7,-2,2)^T$.

a=4k+2 Řešení neexistuje.

a=4k+3 Jedno řešení $\mathbf{x}=(19,-17,6,-2)^T$

b) Jenom první proměnná nezávisí na parametru a:
$$x_1=\frac{17}{15}, \quad x_2=\frac{2-5a}{15}, \quad x_3=\frac{a-1}{3}, \quad x_4=\frac{8-5a}{15}$$

0.11 a) Číslu $\lambda_1=1$ odpovídá vektor $(a+4,-2)^T$ Číslu $\lambda_2=7+a$ odpovídá vektor $(1,1)^T$
b) Číslu $\lambda_1=5$ odpovídá vektor $(a-4, 11-2a, a-4)^T$, $\lambda_2=-2$ odpovídá vektor $(a-1, a-1, 7-2a)^T$, $\lambda_3=3a-10$ odpovídá vektor $(1,1,1)^T$.

0.12 a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} a+1 & -a \\ -1-a & a+1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} a+1 & -a \\ -1-a & a+1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} a & -1 & -a+2 \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -6 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

0.13

a) $$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= [1,-1,1,-1]^T, \\ \vec{v}_2 &= [0,1,2,1]^T, \\ \vec{v}_3 &= [0,-1,0,1]^T, \\ \vec{v}_4 &= [3,1,-1,1]^T \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= [2,-2,1,-1]^T, \\ \vec{v}_2 &= [1,-2,1,-1]^T, \\ \vec{v}_3 &= [1,1,-1,-1]^T, \\ \vec{v}_4 &= [1,-1,-2,2]^T \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= [1,1,1,-1]^T, \\ \vec{v}_2 &= [0,-1,2,1]^T, \\ \vec{v}_3 &= [0,1,0,1]^T, \\ \vec{v}_4 &= [3,-1,-1,1]^T \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= [1,-1,1,-1]^T, \\ \vec{v}_2 &= [1,1,1,1]^T, \\ \vec{v}_3 &= [1,2,-3,0]^T, \\ \vec{v}_4 &= [1,-5,-3,7]^T \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= [1, 1, 1, 1, 1]^T, \\ \vec{v}_2 &= [-1, -1, 0, 1, 1]^T, \\ \vec{v}_3 &= [1, -1, 0, -1, 1]^T, \\ \vec{v}_4 &= [-1, 0, 2, -1, 0]^T \\ \vec{v}_5 &= [2, -3, 2, 2, -3]^T\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= [1, 1, 2, 1, 1]^T, \\ \vec{v}_2 &= [-1, -1, 0, 1, 1]^T, \\ \vec{v}_3 &= [1, -1, 0, -1, 1]^T, \\ \vec{v}_4 &= [3, -1, -2, 3, -1]^T \\ \vec{v}_5 &= [0, 1, -1, 0, 1]^T\end{aligned}$$