Příjmení, jméno, ID 3. 1. 2019 A

....

1. Jsou dány vektory $\vec{v}_1 = (1,1,1,1)^T, \vec{v}_2 = (0,2,4,6)^T, \vec{v}_3 = (0,4,16,36)^T$. Ortogonalizujte tyto vektory v daném pořadí. 10bodů
   $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1,1,1,1)^T, \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{v}_2 = (0,2,4,6)^T - \frac{12}{4}(1,1,1,1)^T = (-3,-1,1,3)^T$,
   $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = (0,4,16,36)^T - \frac{56}{4}(1,1,1,1)^T - \frac{120}{20}(-3,-1,1,3)^T = (4,-4,-4,4)^T$

2. Diskutujte definitnost matice $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ vzhledem k parametru a. 10bodů

   $$\Delta_1 = -5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -5a-1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -5a^2-2a+7 = -5\left(a+\frac{7}{5}\right)(a-1),$$
   negativně definitní pro $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ to jest $a < -7/5$, pro $a > -7/5$ je indefinitní

3. Vypočtěte exponenciálu matice $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 10bodů

   $\chi_A = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)$ je minimální polynom. $P(x) = Ax + B, f(x) = e^{xt}$
   $e^t = A + B \wedge e^{3t} = 3A + B \Rightarrow P(x) = \frac{e^{3t}-e^t}{2}x + \frac{e^{3t}+e^t}{2}, P(A) = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^t + 3\,\mathrm{e}^{3\,t} & -6\,\mathrm{e}^{3\,t} + 6\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{3\,t} - \mathrm{e}^t & 3\,\mathrm{e}^t - 2\,\mathrm{e}^{3\,t} \end{pmatrix}$

4. Určete největší řešení (kořen) rovnice $e^x = 3x$ s přesností 10^{-2}. 10bodů
   největší řešení rovnice $= 1,512134552$, nejmenší řešení rovnice $= 0,6190612867$

5. K zadaným bodům

x	0	2	4	6
y	-4	-1	0	-1

   vypočtěte lineární a kvadratické vyrovnáni. 10bodů

   $$y = -3 + \frac{x}{2} \quad y = -4 + 2x - \frac{x^2}{4} \quad \begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 56 & -6 \\ 12 & 56 & 288 & -8 \\ 56 & 288 & 1568 & -40 \end{array}$$

   Variantní řešení s využitím příkladu 1:

   - LINEÁRNÍ VYROVNÁNÍ
     $\vec{V} = L((1,1,1,1)^T, (0,2,4,6)^T) = L((1,1,1,1)^T, (-3,-1,1,3)^T) = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$
     ortogonální projekci $\vec{u}_p$ vektoru $\vec{y} = (-4,-1,0,-1)^T$ na prostor $\vec{V}$ má tvar

     $$\vec{u}_p = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2,$$

     kde $\alpha_i\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = \vec{v} \cdot \vec{u}_i$, tj. $\alpha_1 4 = -6$, $\alpha_2 20 = 10$,tedy

     $$\vec{u}_p = -\frac{3}{2}(1,1,1,1)^T + \frac{1}{2}(-3,-1,1,3)^T = (-3,-2,-1,0)^T.$$

     Tento vektor můžeme vyjádřit vzhledem k bázi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ s využitím vztahů uvedených v prvním příkladu:

     $$\vec{u}_p = -\frac{3}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}(\vec{v}_2 - 3\vec{v}_1) = -3\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2$$

- KVADRATICKÉ VYROVNÁNÍ
  $\vec{V}_3 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Ortogonální projekce $\vec{u}_p$ vektoru $\vec{y} = (-4, -1, 0, -1)^T$ na prostor $\vec{V}_3$ má tvar
  $$\vec{u}_p = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3,$$
  kde $\alpha_i \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = \vec{v} \cdot \vec{u}_i$, tj. $\alpha_1 4 = -6$, $\alpha_2 20 = 10$, $\alpha_3 64 = -16$, tedy
  $$\vec{u}_p = -\frac{3}{2}(1,1,1,1)^T + \frac{1}{2}(-3,-1,1,3)^T - \frac{1}{4}(4,-4,-4,4)^T = (-4,-1,0,-1)^T.$$
  Tento vektor můžeme vyjádřit vzhledem k bázi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ s využitím vztahů uvedených v prvním příkladu:
  $$\vec{u}_p = -\frac{3}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\left(\vec{v}_2 - 3\vec{v}_1\right) - \frac{1}{4}\left(\vec{v}_3 - 14\vec{v}_1 - 6(\vec{v}_2 - 3\vec{v}_1)\right) = -4\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \frac{1}{4}\vec{v}_3$$

6. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \exp(-3x - x^2)\,\mathrm{d}x$ přesností 10^{-2} 10bodů
   $0,2815758856$
7. Zaveďte pojem matice a determinantu. Operace s maticemi. 5bodů

8. Interpolace funkcí. 5bodů

Příjmení, jméno, ID 3. 1. 2019 B

....

1. Jsou dány vektory $\vec{v}_1 = (1,1,1,1)^T, \vec{v}_2 = (0,1,3,4)^T, \vec{v}_3 = (0,1,9,16)^T$. Ortogonalizujte tyto vektory v daném pořadí. 10bodů
   $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1,1,1,1)^T, \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{v}_2 = (0,1,3,4)^T - \frac{8}{4}(1,1,1,1)^T = (-2,-1,1,2)^T$,
   $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1} - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = (0,1,9,16)^T - \frac{26}{4}(1,1,1,1)^T - \frac{40}{10}(-2,-1,1,2)^T = \frac{1}{2}(3,-3,-3,3)^T$

2. Diskutujte definitnost matice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ vzhledem k parametru a. 10bodů

   $$\Delta_1 = 3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 3a-1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 3a^2 - 2a - 1 = 3\left(a + \frac{1}{3}\right)(a-1),$$

   pozitivně definitní pro $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ to jest $a > 1$, pro $a < 1$ je indefinitní

3. Vypočtěte exponenciálu matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ 10bodů

   $\chi_A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-5)$ je minimální polynom. $P(x) = Ax + B, f(x) = e^{xt}$

   $$e^{4t} = 4A + B \wedge e^{5t} = 5A + B \Rightarrow P(x) = e^{5t} - e^{4t}x + 5e^{4t} - 4e^{5t}$$

   $$P(A) = \begin{pmatrix} 3\,e^{4\,t} - 2\,e^{5\,t} & 6\,e^{5\,t} - 6\,e^{4\,t} \\ -e^{5\,t} + e^{4\,t} & -2\,e^{4\,t} + 3\,e^{5\,t} \end{pmatrix}$$

4. Určete největší řešení (kořen) rovnice $e^x = 5x$ s přesností 10^{-2}. 10bodů
   největší řešení rovnice $= 2,542641358$, nejmenší řešení rovnice $= 0,6190612867$

5. K zadaným bodům vypočtěte lineární a kvadratické vyrovnáni. 10bodů

x	0	1	3	4
y	-4	-1	0	-1

   $$y = -\frac{29}{10} + \frac{7}{10}x \quad y = -\frac{39}{10} + \frac{101}{30}x - \frac{2}{3}x^2 \quad \begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 26 & -6 \\ 8 & 26 & 92 & -5 \\ 26 & 92 & 338 & -17 \end{array}$$

   Variantní řešení s využitím příkladu 1:

   - LINEÁRNÍ VYROVNÁNÍ
     $\vec{V} = L((1,1,1,1)^T, (0,1,3,4)^T) = L((1,1,1,1)^T, (-2,-1,1,2)^T) = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$
     ortogonální projekci $\vec{u}_p$ vektoru $\vec{y} = (-4,-1,0,-1)^T$ na prostor $\vec{V}$ má tvar

     $$\vec{u}_p = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2,$$

     kde $\alpha_i\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = \vec{v} \cdot \vec{u}_i$, tj. $\alpha_1 4 = -6$, $\alpha_2 10 = 7$,tedy

     $$\vec{u}_p = -\frac{3}{2}(1,1,1,1)^T + \frac{7}{10}(-2,-1,1,2)^T = \frac{1}{10}(-29,-22,-8,-1)^T.$$

Tento vektor můžeme vyjádřit vzhledem k bázi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ s využitím vztahů uvedených v prvním příkladu:

$$\vec{u}_p = -\frac{3}{2}\vec{v}_1 + \frac{7}{10}\left(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1\right) = -\frac{29}{10}\vec{v}_1 + \frac{7}{10}\vec{v}_2$$

- KVADRATICKÉ VYROVNÁNÍ
  $\vec{V}_3 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Ortogonální projekce $\vec{u}_p$ vektoru $\vec{y} = (-4, -1, 0, -1)^T$ na prostor $\vec{V}_3$ má tvar

  $$\vec{u}_p = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3,$$

  kde $\alpha_i\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = \vec{v} \cdot \vec{u}_i$, tj. $\alpha_1 4 = -6$, $\alpha_2 10 = 7$, $\alpha_3 9 = -6$, tedy

  $$\vec{u}_p = -\frac{3}{2}(1,1,1,1)^T + \frac{7}{10}(-2,-1,1,2)^T - \frac{2}{3}(1,-1,-1,1)^T = \frac{1}{30}(-107,-46,-4,-23)^T.$$

  Tento vektor můžeme vyjádřit vzhledem k bázi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ s využitím vztahů uvedených v prvním příkladu:

  $$\vec{u}_p = -\frac{3}{2}\vec{v}_1 + \frac{7}{10}\left(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1\right) - \frac{2}{3}\left(\vec{v}_3 - \frac{13}{2}\vec{v}_1 - 4(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1)\right) = -\frac{39}{10}\vec{v}_1 + \frac{101}{30}\vec{v}_2 - \frac{2}{3}\vec{v}_3$$

6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ přesností 10^{-2} 10bodů
   $3,059116540$
7. Definujte vektorový prostor, jeho bázi a dimenzi. 5bodů
8. Numerické metody řešení rovnic. 5bodů